Módulos Yetter-Drinfeld sobre álgebras de Hopf trenzadas débiles

Carlos Soneira Calvo

Módulos Yetter-Drinfeld sobre álgebras de Hopf trenzadas débiles

Asdo.: Carlos Soneira Calvo

Memoria para optar ao grao de Doutor realizada por Carlos Soneira Calvo no Departamento de Álxebra da Universidade de Santiago de Compostela baixo a dirección dos Profesores Dr. José Nicanor Alonso Álvarez e Dr. Ramón González Rodríguez, e baixo a tutela do Profesor Dr. José Manuel Fernández Vilaboa.

Santiago de Compostela, 28 de febreiro de 2012.

Prof. Dr. J. Nicanor Alonso Álvarez   Prof. Dr. Ramón González Rodríguez

Prof. Dr. José Manuel Fernández Vilaboa

INFORME DOS DIRECTORES

José Nicanor Alonso Álvarez, profesor titular de Universidade no Departamento de Matemáticas da Universidade de Vigo e **Ramón González Rodríguez**, profesor titular de Universidade no Departamento de Matemática Aplicada II da Universidade de Vigo, emiten o seguinte e preceptivo

INFORME

O traballo *Módulos Yetter-Drinfeld sobre álgebras de Hopf trenzadas débiles* presentado por **Carlos Soneira Calvo** constitúe a súa Tese de Doutoramento, que foi realizada baixo a nosa dirección. En vista do traballo desenvolvido polo doutorando e o resultado final do mesmo, o noso informe sobre a Tese presentada é **TOTALMENTE FAVORABLE**, avalando a súa presentación ante o Departamento de Álxebra e, posteriormente, ante a Comisión de Doutoramento da Universidade de Santiago de Compostela.

Santiago de Compostela, 28 de febreiro de 2012

José Nicanor Alonso Álvarez   Ramón González Rodríguez

Aos meus pais

Agradecementos

Aproveito estas liñas para agradecer a axuda de todos os que estiveron ao meu carón durante a realización desta tese.

En primeiro lugar, agradézolle ao meu titor Prof. José Manuel Fernández Vilaboa e aos meus directores de tese Prof. José Nicanor Alonso Álvarez e Ramón González Rodríguez, que me aceptaran como alumno, me introduciran na álxebra non conmutativa, espertaran o meu interese pola mesma, e me guiaran na investigación ao longo destes anos.

Quero mencionar aos profesores do Departamento de Álxebra da Universidade de Santiago de Compostela e aos do Departamento de Pedagoxía e Didáctica da Universidade da Coruña, polo excelente ambiente de traballo, a súa comprensión, e a boa disposición que me amosaron sempre. En especial ao Prof. Enrique de la Torre Fernández por me facilitar o máximo posible a realización desta tese.

Non podo esquecerme de Silvia por me escoitar, sobre todo nos malos momentos.

Finalmente, teño que agradecerlle á miña familia o apoio que me deron ao longo de todo este tempo, moi especialmente aos meus pais, pois sen o seu apoio incondicional e os seus azos eu nunca tería realizado esta tese de doutoramento.

Índice general

Introducción

El área científica

La teoría de las álgebras de Hopf y sus generalizaciones es una parte de las matemáticas que en las últimas décadas ha experimentado un gran desarrollo por sus aplicaciones en la física de partículas.

Su origen se relaciona con la topología y la geometría algebraica, aunque la definición formal concreta sufrió algunos cambios desde su introducción.

Toma su nombre de Heinz Hopf, quien en [55], para estudiar los anillos de cohomología de ciertas variedades, define un coproducto sobre los mismos. Las propiedades de tales anillos y en particular las relaciones de compatibilidad entre el producto y el coproducto, son los primeros casos particulares de las condiciones que hoy en día definen a un álgebra de Hopf.

El término álgebra de Hopf aparece por primera vez en el trabajo [27] de Borel, donde se utiliza para estudiar la homología de fibrados principales, si bien la definición manejada en ese trabajo es distinta de la actual, al no exigirse la coasociatividad ni la existencia de antípodo.

En un contexto topológico, Milnor y Moore usan en [73], con el nombre de álgebra de Hopf, lo que hoy denominaríamos biálgebra graduada, probando que sobre un cuerpo de característica cero, la categoría de las álgebras de Lie graduadas es isomorfa a la de álgebras de Hopf primitivamente generadas, porque el álgebra universal envolvente de un álgebra de Lie es un álgebra de Hopf coconmutativa. En ese mismo trabajo demuestran también varios teoremas de estructura de álgebras de Hopf graduadas coconmutativas, generalizando resultados anteriores sobre la estructura de los anillos de homología de grupos de Lie.

En el contexto de la geometría algebraica la noción de álgebra de Hopf aparece ligada a la de grupo algebraico. En topología algebraica la idea subyacente consiste en estudiar un grupo a través de su álgebra de funciones. Esta misma idea se usa en geometría algebraica, pasando de la categoría de espacios a la de álgebras asociativas considerando las funciones definidas sobre las variedades. Bajo ciertas condiciones se establece así una antiequivalencia de categorías. En concreto, el álgebra de funciones de un grupo algebraico afín sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es un álgebra de Hopf conmutativa, con el coproducto definido a partir del producto del grupo algebraico afín, la counidad a partir de la unidad del grupo, y el antípodo como el morfismo inducido por el cálculo de inverso en el grupo. La primera definición formal de lo que hoy entendemos por álgebra de Hopf aparece en el trabajo de Cartier [35], aunque bajo el nombre de hiperálgebra y en el caso filtrado. Los axiomas actuales son algo diferentes, pero se deducen a partir de los de [35].

Si bien los primeros ejemplos de álgebras de Hopf con los que se trabajó eran todos conmutativos o coconmutativos, el estudio de problemas en la física hizo necesario considerar casos más generales. A la hora de modelar matemáticamente fenómenos físicos, los elementos de un grupo pueden interpretarse como estados y los de su álgebra de funciones como observables. En este contexto, para estudiar y construir sistemas cuánticos integrables, Fadeev, Reshetikhin, Sklyanin y Takhtadzhyan desarrollan el llamado método de scattering inverso (véase [47], [48],[49], [86]), que se basa en un ejemplo de álgebra de Hopf que no es conmutativa ni coconmutativa.

Posteriormente, Drinfeld en [38] y Jimbo en [56] obtienen independientemente otros ejemplos. Estos consisten en la deformación de un álgebra envolvente de un álgebra de Lie. Una de las aplicaciones fundamentales de estos nuevos ejemplos es la obtención sistemática de soluciones de la llamada ecuación cuántica de Yang-Baxter enunciada en términos matriciales. La ecuación surge para abordar problemas en mecánica cuántica, es introducida por Yang en [94] y posteriormente por Baxter en [14] en el contexto de la mecánica estadística, y usada además para calcular invariantes en la teoría topológica de enlaces en [91] y en variedades de dimensión tres en [92]. El término grupo cuántico es introducido por Drinfeld en [39] para designar al álgebra dual de un álgebra de Hopf no conmutativa ni coconmutativa. En [39] se define también el concepto de álgebra de Hopf cuasitriangular, y mediante su categoría de módulos asociada se obtienen soluciones de la ecuación cuántica de Yang-Baxter. Además, se propone un método universal para encontrar álgebras de Hopf cuasitriangulares a partir de un álgebra de Hopf de dimensión finita con antípodo inversible, ya que el objeto denominado doble cuántico (posteriormente doble de Drinfeld) y definido como el biproducto cruzado del álgebra de Hopf con la opuesta de su dual, cumple las condiciones de álgebra de Hopf cuasitriangular.

A partir de este momento, las aplicaciones de las álgebras de Hopf se ampliaron enormemente. Uno de los campos de aplicación es la geometría Riemanniana, donde la curvatura puede interpretarse como el parámetro que hace que el álgebra de funciones de la variedad sea un álgebra de Hopf no coconmutativa. Otro ámbito es la geometría no conmutativa, tanto en la vertiente diferencial de Connes como en la algebraica de Manin (véase [72]). A su vez, la geometría no conmutativa se usa en física para estudiar la gravitación cuántica, la cual pretende resolver el problema de la compatibilidad entre dos de las principales teorías de la física teórica, como son la mecánica cuántica y la teoría general de la relatividad. En este sentido, la propiedad de autodualidad de las álgebras de Hopf, es decir, el hecho de que el objeto dual de un álgebra de Hopf es también un álgebra de Hopf, puede dar respuesta a alguna de las cuestiones planteadas (véase [65], [66], [69]).

Posteriormente, en fechas recientes, se han formulado otros problemas donde aparecen objetos cuya estructura, guardando relación con la de álgebra de Hopf, no encajan en su definición. Al contrario de lo que ocurre en dimensiones superiores, en dimensión 2 la simetría interna de los modelos físicos espacio-tiempo no está caracterizada de forma única, por lo que no puede describirse mediante un grupo cuántico. En este sentido, en [53] se introduce la llamada ecuación dinámica de Yang-Baxter.

De modo similar a como los grupos cuánticos aparecieron en la búsqueda de soluciones de la ecuación de Yang-Baxter, en el caso dinámico surge la noción de grupo cuántico dinámico. Los primeros ejemplos con los que se trabajó, asociados a ciertos casos particulares de la ecuación dinámica, fueron los llamados grupos cuánticos elípticos definidos por Felder en [50] y [51]. En [44] se demuestra que los grupos cuánticos elípticos cumplen las condiciones de la definición de cuasiálgebra de Hopf, concepto introducido por Drinfeld (véase [41], [42]). Esto motivó que las cuasiálgebras de Hopf se considerasen como una alternativa para generalizar la noción de álgebra de Hopf, aunque presentan los inconvenientes de eliminar la coasociatividad y de que el concepto de cuasibiálgebra no es autodual.

Más tarde, Böhm, Nill y Szlachányi (véase [88], [21]) definen otra generalización de los grupos cuánticos, las llamadas de álgebras de Hopf débiles. Estas permiten describir los modelos espacio-tiempo en dimensión 2 porque en su definición se considera una simetría de la categoría distinta de la trivial, y también encontrar soluciones de la ecuación dinámica de Yang-Baxter con mayor generalidad al relacionarse con las deformaciones dinámicas de grupos cuánticos. Además, al contrario de lo que ocurre con las cuasiálgebras de Hopf, son coasociativas y autoduales. Con respecto a las álgebras de Hopf, la diferencia se encuentra en que la unidad y la counidad no son morfismos de coálgebras y álgebras respectivamente, al mismo tiempo que se debilitan las condiciones sobre el antípodo. Las álgebras de Hopf débiles tienen también aplicaciones en la reconstrucción de categorías, ya que cualquier categoría de multi-fusión es equivalente a la categoría de módulos de dimensión finita sobre un álgebra de Hopf débil semisimple, y además el álgebra de Hopf débil es conexa si y solo si la categoría de multi-fusión es de fusión (véase [45]). En particular, dada una cuasiálgebra de Hopf semisimple de dimensión finita, puesto que la categoría de módulos sobre ella es de fusión, se deduce que es isomorfa a la categoría de módulos de dimensión finita sobre algún álgebra de Hopf débil. Son también útiles en la teoría de operadores y la teoría de extensiones de álgebras.

Dentro de la teoría de álgebras de Hopf el estudio de las proyecciones de un álgebra de Hopf dada ha sido un problema estudiado con mucho interés. En la caracterización de dichas proyecciones, el producto smash y el coproducto smash, nociones que tienen su motivación en el producto semidirecto de grupos y en el cuadrado cocartesiano de grupos algebraicos afines respectivamente, cobran especial relevancia. Radford en [79] establece condiciones equivalentes para que el producto tensor de dos álgebras de Hopf H y B sobre un cuerpo, con la estructura de producto y coproducto smash, sea un álgebra de Hopf, e interpreta tales objetos mediante el concepto de proyección. En concreto, si el biproducto smash $B \otimes H$ es un álgebra de Hopf, entonces existe una proyección

(B, f, g) de B sobre H, es decir, dos morfismos de álgebras de Hopf $f : H \to B$ y $g : B \to H$ tales que $g \circ f = id_H$. Recíprocamente, dada una proyección de álgebras de Hopf (A, f, g) sobre H, si A_H es la imagen de cierto morfismo idempotente, entonces A puede recuperarse como el biproducto smash de A_H y H.

Para caracterizar las biálgebras B tales que $B \otimes H$ con la estructura de producto smash es una biálgebra, Radford introduce condiciones que darán lugar posteriormente a la noción de módulo Yetter-Drinfeld sobre una biálgebra y a la categoría de estos módulos que se denotará posteriormente por ${}_H^H\mathcal{YD}$, definida por Yetter en [95] con el nombre de bimódulo cruzado. En la literatura el concepto se denomina de diversas formas, siendo las más utilizadas las de módulo cruzado (véase [71], [17]), bimódulo cruzado (véase [95], [60]), módulo cuántico de Yang-Baxter (véase [62]), o estructura Yetter-Drinfeld (véase [81]). En cualquier caso en [95] se expone cómo la nueva categoría permite explicar la relación entre distintas teorías en matemáticas y física, como la topología en dimensiones bajas, en concreto la teoría clásica de nudos y enlaces, con la teoría de las categorías monoidales introducidas por Bénabou en [16] y MacLane en [63], la teoría de álgebras de Hopf, los sistemas cuánticos integrables o la teoría de modelos exactamente resolubles en mecánica estadística, y la teoría de cuántica de campos. Por otro lado, los módulos Yetter-Drinfeld juegan un papel central en la teoría de categorías monoidales, ya que dada una categoría monoidal estricta pequeña y pretrenzada $\mathcal{C}$, para cualquiera de sus representaciones finitas complejas F existe una biálgebra $F(H)$ tal que la representación se factoriza a través de la categoría ${}_{F(H)}^{F(H)}\mathcal{YD}$ y la composición con el funtor de olvido. Además la factorización lleva la estructura pretrenzada de $\mathcal{C}$ en la de ${}_{F(H)}^{F(H)}\mathcal{YD}$. Los objetos de esta categoría ya habían sido interpretados previamente por Majid en [67] como una forma de categorizar el concepto de doble de Drinfeld, dando condiciones para que la categoría de representaciones del doble de Drinfeld sea isomorfa a la de módulos Yetter-Drinfeld. En la definición de doble de Drinfeld interviene el álgebra opuesta de la dual, y el isomorfismo de categorías se establece en [67] con una versión de la categoría de módulos Yetter-Drinfeld donde las estructuras de módulo y comódulo se consideran por lados diferentes. Estas son algunas de las motivaciones que llevan a Radford y Towber en [81] a estudiar las relaciones entre distintas categorías Yetter-

Drinfeld que pueden construirse partiendo de una misma biálgebra sobre un anillo conmutativo.

Majid en [69] interpreta los resultados sobre proyecciones de [79] en el contexto de categorías trenzadas y prueba que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de isomorfía de las proyecciones de álgebras de Hopf sobre H y el conjunto de clases de isomorfía de las álgebras de Hopf en la categoría ${}_H^H\mathcal{YD}$ utilizando el proceso de bosonización, que consiste en asociar mediante un producto smash, a cada álgebra de Hopf en ${}_H^H\mathcal{YD}$ un álgebra de Hopf en la categoría base. Estos resultados son aplicados por Andruskiewitsh y Schneider en [13] para clasificar cierto tipo de álgebras de Hopf punteadas finitas; de hecho, en un momento del proceso realizado en [13] se considera la bosonización de un álgebra de Hopf trenzada (véase [90]) en la categoría de módulos Yetter-Drinfeld sobre el álgebra de grupo de un grupo abeliano finito.

Posteriormente Bespalov en [17] extiende los resultados de [79] al caso de categorías trenzadas con idempotentes escindidos, completando el estudio de la teoría de Radford en ese contexto en una serie de trabajos conjuntos con Drabant (véase [18], [19], [20]). Por su parte, Bulacu y Nauwelaerts en [29] prueban una versión para cuasiálgebras de Hopf con antípodo inversible donde la categoría subyacente es la de espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo.

Los módulos Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf débil fueron introducidos por Böhm en [22]. Alonso, Fernández y González en [4] demuestran la versión del teorema de Radford para álgebras de Hopf débiles H con proyección en categorías simétricas con idempotentes escindidos. En [4] dan además la versión categórica del teorema al establecer una equivalencia entre la categoría de proyecciones sobre H y la categoría de álgebras de Hopf en ${}_H^H\mathcal{YD}$, y se recuperan como casos particulares las versiones probadas por Radford en [79] y Majid en [69]. A diferencia de lo que ocurre para las álgebras de Hopf, en el contexto de las álgebras de Hopf débiles la bosonización del álgebra de coinvariantes B_H, no consiste a nivel de objetos en el producto tensor $B_H \otimes H$, sino en la imagen $B_H \times H$ de un morfismo idempotente. También a diferencia de lo que ocurre para álgebras de Hopf, si H es un álgebra de Hopf débil, dada un álgebra de Hopf débil A en ${}_H^H\mathcal{YD}$, la estructura (co)multiplicativa inducida al considerar A como objeto de la categoría de partida $\mathcal{C}$ no es de álgebra de

Hopf ni de álgebra de Hopf débil. Esto motiva la introducción en [4] y posterior desarrollo en [5] de los conceptos de operador Yang-Baxter débil y álgebra de Hopf trenzada débil. La versión del teorema de Radford dada en [4] se extiende en [9] al caso de categorías trenzadas.

La noción de álgebra de Hopf trenzada débil se define en categorías monoidales en general, y al restringirse al caso simétrico se recuperan como casos particulares las de álgebra de Hopf y de álgebra de Hopf débil; en el caso trenzado da lugar al nuevo concepto de álgebra de Hopf débil en una categoría trenzada y como caso particular contiene la noción de álgebra de Hopf trenzada introducida por Takeuchi en [90].

La memoria

Objetivos

Esta memoria tiene dos objetivos principales.

El primero es desarrollar una teoría de módulos Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf trenzada débil D en una categoría monoidal estricta $\mathcal{C}$ donde todo idempotente rompe. Esta teoría general se establece de modo que se recuperan como casos particulares los resultados obtenidos para álgebras de Hopf en [81] y álgebras de Hopf débiles (véase [22], [74], [34]) en categorías simétricas, y dando también varios ejemplos de estas estructuras de módulo Yetter-Drinfeld que no son abarcados por las teorías anteriores.

El otro objetivo es estudiar el concepto de proyección sobre un álgebra de Hopf trenzada débil y obtener la versión categórica del teorema de proyección de Radford para álgebras de Hopf débiles en categorías trenzadas, extendiendo los resultados dados en [79], [69] y [4] en el contexto simétrico.

Parte de los resultados pueden encontrarse en [9], [10] y [12].

Entrando más en detalle, el contenido de la memoria se distribuye en cinco capítulos que se resumen a continuación.

Capítulo 1: Preliminares

En este capítulo se establece el contexto general en el que se trabaja a lo largo de la memoria y se fija la notación básica a utilizar.

En la primera sección se repasa la teoría de categorías monoidales. La segunda se dedica a conceptos relacionados con las álgebras de Hopf trenzadas débiles, dando sus definiciones y propiedades básicas. Se recuerdan las nociones de álgebra de Hopf y álgebra de Hopf débil en distintos contextos según las propiedades de la categoría sobre la que se defina la estructura, y se explica por qué constituyen casos particulares de álgebras de Hopf trenzadas débiles. Se dan también ejemplos no triviales de álgebras de Hopf trenzadas débiles, es decir, objetos con esta estructura que no son álgebras de Hopf ni álgebras de Hopf débiles (Ejemplos 1.2.10). En cuanto a las propiedades de las álgebras de Hopf trenzadas débiles, los resultados incluidos son ya conocidos, a excepción del Teorema 1.2.15, donde se prueba que el álgebra opuesta y el álgebra coopuesta de un álgebra de Hopf trenzada débil con antípodo inversible, son también álgebras de Hopf trenzadas débiles.

Capítulo 2: Operadores débiles

El objetivo fundamental de este capítulo consiste en sentar las bases que nos permitirán introducir la noción de módulo Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf trenzada débil en una categoría monoidal estricta donde todo morfismo idempotente rompe.

Para ello, en la primera sección del capítulo introducimos la noción de operador débil, estudiamos sus propiedades básicas y su interacción con los morfismos idempotentes. En concreto, si D es una biálgebra trenzada débil y M un objeto cualquiera, se define un (M, D)-operador débil como una cuádrupla de morfismos (r_M, r'_M, s_M, s'_M) satisfaciendo una serie de axiomas (Definición 2.1.1). Ejemplos particulares de operadores débiles se obtienen a partir de un operador Yang-Baxter débil cuando $M = D$, y a partir de una trenza global en el caso de categorías trenzadas (Observación 2.1.11).

En la segunda sección se estudian los operadores débiles cuando el objeto M tiene además una estructura de módulo o de comódulo. En este sentido, la noción de (M, D)-operador débil compatible permite generar para M, tanto sobre D como sobre sus álgebras opuesta y coopuesta, nuevas estructuras de módulo y comódulo (Proposiciones 2.2.8 - 2.2.15).

Capítulo 3: Monoidalidad de la categoría de módulos Yetter-Drinfeld

En este capítulo, para un álgebra de Hopf trenzada débil D en una categoría monoidal estricta donde todo idempotente rompe, se introducirá la noción de módulo Yetter-Drinfeld y se demostrará que estos objetos dan lugar a categorías monoidales.

En la primera sección se da la definición de módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre D mediante condiciones que involucran a un (M, D)-operador débil compatible (Definición 3.1.1) y se definen también los morfismos entre tales objetos, estableciéndose la categoría ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$ (Definición 3.1.5). A continuación se estudia la invariancia de las (co)estructuras de (co)módulo al componer con los morfismos idempotentes asociados al operador débil (Proposición 3.1.10), para lo que se utiliza una caracterización alternativa de módulo Yetter-Drinfeld (Proposición 3.1.6).

En la segunda sección se establece la estructura monoidal de ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$. Dados M y N dos objetos en ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$ se toma como producto tensor la imagen de un idempotente $\nabla_{M\otimes N} : M \otimes N \to M \otimes N$. Cuando el antípodo λ_D es inversible, dicho producto tensor, denotado como $M \times N$, puede dotarse de una (co)estructura de (co)módulo (Proposición 3.2.10) y de un $(M \times N, D)$-operador débil compatible (Proposición 3.2.11). Con esas estructuras $M \times N$ es un objeto en ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$ (Proposición 3.2.12).

Posteriormente se demostrará que la categoría ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$ admite objeto base y usando los morfismos asociados a la escisión del morfismo idempotente $\nabla_{M\otimes N}$ se construyen los isomorfismos naturales de asociatividad (Lema 3.2.15) y unidad (Lemas 3.2.17, 3.2.18), y finalmente se demuestra que la categoría ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$ es monoidal no estricta (Teorema 3.2.19).

En la tercera sección se dan ejemplos de módulos Yetter-Drinfeld trabajando con la acción adjunta y la coacción adjunta asociada a D. Ahora bien, es interesante resaltar que cuando H es un álgebra de Hopf en una categoría trenzada estricta, el triple (H, φ_H, δ_H) con φ_H la acción adjunta es un módulo Yetter-Drinfeld, al igual que el triple (H, μ_H, ϱ_H) con ϱ_H la coacción adjunta, pero en el contexto débil estos resultados no son ciertos en general. Más concretamente, cuando partimos de un álgebra de Hopf trenzada débil D los morfismos $\omega_D^a = \varphi_D \circ (\eta_D \otimes D)$ y $\omega_D^c = (\varepsilon_D \otimes D) \circ \varrho_D$ son idempotentes en $\mathcal{C}$ (Proposición 3.3.1), y sobre sus imágenes $\Omega^a(D)$ y $\Omega^c(D)$ respectivamente, definimos, a partir de los morfismos de escisión, estructuras de módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre D (Proposición 3.3.11).

Capítulo 4: Equivalencias entre distintas categorías de módulos Yetter-Drinfeld

En este capítulo se cubre otra parte del primer objetivo de la memoria, estudiando en el contexto monoidal las distintas categorías Yetter-Drinfeld que surgen de forma natural en función de los lados por los que se consideren las (co)estructuras de (co)módulo o las deformaciones realizadas sobre la base D, de modo que se recuperan los resultados de [81] al particularizar al caso de álgebras de Hopf en categorías simétricas. Se comienza definiendo las distintas categorías $\mathcal{YD}_D^D$, ${}_D\mathcal{YD}^D$ y ${}^D\mathcal{YD}_D$ y estudiando sus propiedades principales, para concluir probando que todas ellas, así como las correspondientes tomando como base D^{op}, D^{coop}, $D^{\text{op}^{\text{coop}}}$ o $D^{\text{coop}^{\text{op}}}$, son equivalentes a ${}_D^D\mathcal{YD}$ (Teorema 4.2.1). El método de demostración consiste en probar primero que para cualesquiera de las categorías consideradas las estructuras de (co)módulo permanecen invariantes al componer con los morfismos idempotentes asociados al operador débil, por lo que se pueden aplicar las Proposiciones 2.2.8 - 2.2.10 que establecen en particular que todas las transformaciones realizadas en las (co)estructuras de (co)módulo a lo largo de la prueba, dan lugar a nuevas (co)estructuras para las que existe un operador débil compatible y éste se puede determinar explícitamente.

Capítulo 5: Proyecciones sobre un AHTD

El objetivo fundamental de este último capítulo es el estudio de las proyecciones sobre un álgebra de Hopf trenzada débil. Además se explicará la relación entre los conceptos de operador débil y entrelazamiento débil y se darán ejemplos de módulos Yetter-Drinfeld y de álgebras de Hopf trenzadas débiles que no abarcan las definiciones clásicas.

En la primera sección se define la categoría $\mathcal{P}roj(D)$ de las proyecciones sobre un álgebra de Hopf trenzada débil D como aquella cuya clase de objetos es la formada por los triples (B, f, g) formados por un álgebra de Hopf trenzada débil B junto con dos morfismos de álgebras de Hopf trenzadas débiles $f : D \to B$ y $g : B \to D$ que cumplen ciertas relaciones de compatibilidad con respecto al operador Yang-Baxter débil asociado a B y además $g \circ f = id_D$. Cada objeto en $\mathcal{P}roj(D)$ define un morfismo idempotente $q_D^B : B \to B$ (Proposición 5.1.5) cuya imagen B_D puede dotarse de una (co)estructura de D-(co)módulo por la izquierda de forma que el triple $(B_D, \varphi_{B_D}, \varrho_{B_D})$ es un objeto en ${}_D^D\mathcal{YD}$ (5.1.14).

La segunda sección comienza recordando los conceptos de estructura entrelazada débil y estructura entrelazada débil inversible (Definiciones 5.2.1 y 5.2.3) y posteriormente se aplican los resultados obtenidos en la primera sección para describir la relación entre los conceptos de operador Yang-Baxter débil y estructura entrelazada débil inversible en términos de operadores débiles (Proposición 5.2.4).

En la tercera sección se demuestra que cuando el álgebra de Hopf trenzada débil D tiene antípodo inversible y (B, f, g) es un objeto de $\mathcal{P}roj(D)$, entonces B_D es una biálgebra para la que podemos construir un antípodo λ_{B_D} (Proposición 5.1.7) de tal forma que B_D es un álgebra de Hopf trenzada débil (Teorema 5.3.2).

En la cuarta sección se aplican los resultados anteriores para dar una versión categórica del teorema de proyección de Radford cuando H es un álgebra de Hopf débil en una categoría monoidal trenzada estricta. En primer lugar, particularizando las construcciones del Capítulo 3, se demuestra que, al igual que en el caso simétrico, la categoría ${}_H^H\mathcal{YD}$ es trenzada. El resto de la sección se dedica a construir una equivalencia categórica entre $\mathcal{P}roj(H)$ y la categoría de las álgebras de Hopf en ${}_H^H\mathcal{YD}$ (Teorema 5.4.22).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen las definiciones y resultados básicos que se utilizarán a lo largo de la memoria. Se fija también gran parte de la notación.

En la primera sección se repasa brevemente la teoría de categorías monoidales. La segunda sección se dedicada al estudio de las álgebras de Hopf trenzadas débiles introducidas por Alonso, González y Fernández en [4], dando varios ejemplos, tanto de estructuras clásicas englobadas en esta noción, como de nuevas estructuras que no son abarcadas por las clásicas.

1.1. Contexto general y primeras definiciones

A lo largo de toda la memoria, salvo indicación explícita de lo contrario, se trabaja sobre una categoría monoidal [43], cuya definición es la que sigue:

Definición 1.1.1. Una categoría monoidal es una categoría $\mathcal{C}$ junto con un bifuntor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ llamado producto tensor, un objeto K de $\mathcal{C}$ llamado objeto base o unidad, y unas familias de isomorfismos naturales

$$\mathfrak{a}_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C,$$

$$\mathfrak{l}_A : K \otimes A \to A, \qquad \mathfrak{r}_A : A \otimes K \to A,$$

llamados respectivamente isomorfismo natural de asociatividad, isomorfismo natural de unidad por la izquierda e isomorfismo natural de unidad por la derecha, satisfaciendo las siguientes condiciones:

Axioma del pentágono. Dados cuatro objetos cualesquiera A, B, C, y D en $\mathcal{C}$ se cumple que

$$(\mathfrak{a}_{A,B,C} \otimes id_D) \circ \mathfrak{a}_{A,B\otimes C,D} \circ (id_A \otimes \mathfrak{a}_{B,C,D}) = \mathfrak{a}_{A\otimes B,C,D} \circ \mathfrak{a}_{A,B,C\otimes D}.$$

axioma del triángulo. Dados dos objetos cualesquiera A y B en $\mathcal{C}$ se cumple que

$$(\mathfrak{r}_A \otimes id_B) \circ a_{A,K,B} = id_A \otimes \mathfrak{l}_B.$$

La categoría monoidal se dice *estricta* si tanto los isomorfismos de asociatividad como los de identidad por ambos lados son identidades de la categoría.

Denotamos una categoría monoidal por $(\mathcal{C}, \otimes, K, \mathfrak{a}, \mathfrak{l}, \mathfrak{r})$, o bien sólo por $\mathcal{C}$ cuando no se presente posibilidad alguna de confusión respecto a la estructura considerada.

Designamos la clase de objetos de $\mathcal{C}$ por $|\mathcal{C}|$ y para cada objeto $A \in |\mathcal{C}|$ el morfismo identidad por $id_A : A \to A$. En lo sucesivo, para una mayor simplicidad en la notación, dados objetos A, B, C en $\mathcal{C}$ y un morfismo $f : A \to B$ escribiremos $C \otimes f$ y $f \otimes C$ en lugar de $id_C \otimes f$ y $f \otimes id_C$ respectivamente.

Como consecuencias de la definición, en una categoría monoidal se cumple:

$$(\mathfrak{l}_A \otimes B) \circ \mathfrak{a}_{K,A,B} = \mathfrak{l}_{A\otimes B}, \qquad \mathfrak{r}_{A\otimes B} \circ \mathfrak{a}_{A,B,K} = A \otimes \mathfrak{r}_B,$$

$$\mathfrak{l}_{K\otimes A} = K \otimes \mathfrak{l}_A, \qquad \mathfrak{r}_{A\otimes K} = \mathfrak{r}_A \otimes K, \qquad \mathfrak{l}_K = \mathfrak{r}_K.$$

Definición 1.1.2. Sean $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, K_{\mathcal{C}}, \mathfrak{a}^{\mathcal{C}}, \mathfrak{l}^{\mathcal{C}}, \mathfrak{r}^{\mathcal{C}})$ y $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \boxtimes, K_{\mathcal{D}}, \mathfrak{a}^{\mathcal{D}}, \mathfrak{l}^{\mathcal{D}}, \mathfrak{r}^{\mathcal{D}})$ dos categorías monoidales. Se dice que un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es monoidal si existe un isomorfismo $\Phi_0 : K \to F(K)$ y una familia de isomorfismos naturales $\Phi_{A,B} : F(A) \boxtimes F(B) \to F(A \otimes B)$ tales que dados tres objetos cualesquiera A, B y C en $\mathcal{C}$ se cumple que:

$$\Phi_{A\otimes B,C} \circ (\Phi_{A,B} \boxtimes F(C)) \circ \mathfrak{a}^{\mathcal{D}}_{F(A),F(B),F(C)} = F(\mathfrak{a}^{\mathcal{C}}_{A,B,C}) \circ \Phi_{A,B\otimes C} \circ (F(A) \boxtimes \Phi_{B,C}),$$

$$\mathfrak{l}^{\mathcal{D}}_{F(A)} = F(\mathfrak{l}^{\mathcal{C}}_A) \circ \Phi_{K_{\mathcal{C}},A} \circ (\Phi_0 \otimes F(A)),$$

y

$$\mathfrak{r}^{\mathcal{D}}_{F(A)} = F(\mathfrak{r}^{\mathcal{C}}_A) \circ \Phi_{A,K_{\mathcal{C}}} \circ (F(A) \boxtimes \Phi_0).$$

El funtor monoidal se dice *estricto* si los isomorfismos Φ_0 y $\Phi_{A,B}$ son identidades en $\mathcal{D}$ para cualesquiera $A, B \in |\mathcal{C}|$.

Una *transformación natural monoidal* entre funtores monoidales de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es una transformación natural $\alpha : F \Rightarrow F'$ tal que

$$\alpha(K) \circ \Phi_0 = \Phi'_0$$

y para cada par (A, B) de objetos en $\mathcal{C}$ se satisface la igualdad

$$\alpha(A \otimes B) \circ \Phi_{A,B} = \Phi'_{A,B} \circ (\alpha(A) \boxtimes \alpha(B)).$$

Un *isomorfismo natural monoidal* es una transformación natural monoidal que a su vez es un isomorfismo natural.

Una *equivalencia monoidal* entre categorías monoidales es un funtor monoidal $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ para el que existe un funtor monoidal $F' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos monoidales $\alpha : id_{\mathcal{D}} \Rightarrow F \circ F'$ y $\beta : F' \circ F \Rightarrow id_{\mathcal{C}}$.

En lo sucesivo consideraremos que la categoría monoidal $\mathcal{C}$ es estricta y admite idempotentes escindidos, es decir, para cualquier morfismo $\nabla : A \to A$ tal que $\nabla = \nabla \circ \nabla$ existen un objeto B, que llamaremos en lo sucesivo imagen de ∇, y morfismos $i : B \to A$ y $p : A \to B$ tales que $\nabla = i \circ p$ y $p \circ i = id_B$. No se produce pérdida alguna de generalidad al asumir el carácter estricto para $\mathcal{C}$ ya que dada una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es posible construir una categoría monoidal estricta $\mathcal{C}^{st}$ monoidalmente equivalente a $\mathcal{C}$ [[60], Proposición XI.5.1], y tampoco al suponer que $\mathcal{C}$ admite idempotentes escindidos, puesto que dada cualquiera categoría $\mathcal{C}$ existe un embebimiento universal $\mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ de modo que $\hat{\mathcal{C}}$ admite idempotentes escindidos, tal como se demuestra en [59].

Sea $(\mathcal{C}, \otimes, K, \mathfrak{a}, \mathfrak{l}, \mathfrak{r})$ una categoría monoidal. Una trenza en $\mathcal{C}$ es una familia de isomorfismos naturales

$$c_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$$

tales que

(i) $\mathfrak{a}_{C,A,B} \circ c_{A \otimes B,C} \circ \mathfrak{a}_{A,B,C} = (c_{A,C} \otimes B) \circ \mathfrak{a}_{A,C,B} \circ (A \otimes c_{B,C})$,

(ii) $\mathfrak{a}^{-1}_{B,C,A} \circ c_{A,B \otimes C} \circ \mathfrak{a}^{-1}_{A,B,C} = (B \otimes c_{A,C}) \circ \mathfrak{a}^{-1}_{B,A,C} \circ (c_{A,B} \otimes C)$.

Una categoría monoidal trenzada $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, \mathfrak{l}, \mathfrak{r}, c)$ es una categoría monoidal dotada de una trenza. Si la trenza satisface que $c_{B,A} \circ c_{A,B} = id_{A \otimes B}$, para cualquier par de objetos A, B de $\mathcal{C}$, la categoría $\mathcal{C}$ se dice simétrica.

1.2. Álgebras de Hopf trenzadas débiles

La definición de álgebra de Hopf trenzada débil fue introducida por Alonso, Fernández y González en [4]. En una primera aproximación, un álgebra de Hopf trenzada débil puede entenderse como un álgebra-coálgebra dotada de un operador Yang-Baxter débil que satisface ciertas condiciones de compatibilidad.

Este concepto tiene como casos particulares la noción clásica de álgebra de Hopf en una categoría monoidal trenzada así como a la noción de álgebra de Hopf trenzada introducida por Takeuchi en [90]. También engloba, como caso particular, a la definición de álgebra de Hopf débil introducida por Böhm, Nill y Szlachányi en [21] y cuando el operador Yang-Baxter débil es la trenza de una categoría trenzada, se obtiene la nueva noción de álgebra de Hopf débil en una categoría monoidal trenzada.

Definición 1.2.1. Un álgebra en $\mathcal{C}$ es un triple $A = (A, \eta_A, \mu_A)$ donde A es un objeto en $\mathcal{C}$ y $\eta_A : K \to A$ (unidad), $\mu_A : A \otimes A \to A$ (producto) son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $\mu_A \circ (A \otimes \eta_A) = id_A = \mu_A \circ (\eta_A \otimes A)$ y $\mu_A \circ (A \otimes \mu_A) = \mu_A \circ (\mu_A \otimes A)$. Dadas dos álgebras $A = (A, \eta_A, \mu_A)$ y $B = (B, \eta_B, \mu_B)$, $f : A \to B$ es un morfismo de álgebras si $\mu_B \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_A$, $f \circ \eta_A = \eta_B$.

Una coálgebra en $\mathcal{C}$ es un triple $D = (D, \varepsilon_D, \delta_D)$ donde D es un objeto en $\mathcal{C}$ y $\varepsilon_D : D \to K$ (counidad), $\delta_D : D \to D \otimes D$ (coproducto) son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $(\varepsilon_D \otimes D) \circ \delta_D = id_D = (D \otimes \varepsilon_D) \circ \delta_D$ y $(\delta_D \otimes D) \circ \delta_D = (D \otimes \delta_D) \circ \delta_D$. Si $D = (D, \varepsilon_D, \delta_D)$ y $E = (E, \varepsilon_E, \delta_E)$ son coálgebras, $f : D \to E$ es un morfismo de coálgebras si $(f \otimes f) \circ \delta_D = \delta_E \circ f$, $\varepsilon_E \circ f = \varepsilon_D$.

Si A es un álgebra, B una coálgebra y $\alpha : B \to A$, $\beta : B \to A$ son morfismos, se define la convolución de ambos como $\alpha \wedge \beta = \mu_A \circ (\alpha \otimes \beta) \circ \delta_B$.

Definición 1.2.2. Sea A un álgebra. Se dice que (M, φ_M) es un A-módulo por la izquierda si M es un objeto en $\mathcal{C}$ y $\varphi_M : A \otimes M \to M$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ para el cual $\varphi_M \circ (\eta_A \otimes M) = id_M$, $\varphi_M \circ (A \otimes \varphi_M) = \varphi_M \circ (\mu_A \otimes M)$. Dados dos A-módulos por la izquierda (M, φ_M) y (N, φ_N), la aplicación $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos por la izquierda si $\varphi_N \circ (A \otimes f) = f \circ \varphi_M$. Se dice que (M, ϕ_M) es un A-módulo por la derecha si M es un objeto en $\mathcal{C}$ y $\phi_M : M \otimes A \to M$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ para el cual $\phi_M \circ (M \otimes \eta_A) = id_M$,

$\phi_M \circ (\phi_M \otimes A) = \phi_M \circ (M \otimes \mu_A)$. Dados dos A-módulos por la derecha (M, ϕ_M) y (N, ϕ_N), la aplicación $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos por la derecha si $\phi_N \circ (f \otimes A) = f \circ \phi_M$.

Sea D una coálgebra. Se dice que (M, ϱ_M) es un D-comódulo por la izquierda si M es un objeto en $\mathcal{C}$ y $\varrho_M : M \to D \otimes M$ un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $(\varepsilon_D \otimes M) \circ \varrho_M = id_M$ y $(D \otimes \varrho_M) \circ \varrho_M = (\delta_D \otimes M) \circ \varrho_M$. Dados dos D-comódulos por la izquierda (M, ϱ_M) y (N, ϱ_N), $f : M \to N$ es un morfismo de D-comódulos por la izquierda si $\varrho_N \circ f = (D \otimes f) \circ \varrho_M$. Se dice que (M, ϱ_M) es un D-comódulo por la la derecha si M es un objeto en $\mathcal{C}$ y $\varrho_M : M \to M \otimes D$ un morfismo en $\mathcal{C}$ para el cual $(M \otimes \varepsilon_D) \circ \varrho_M = id_M$ y $(\varrho_M \otimes D) \circ \varrho_M = (M \otimes \delta_D) \circ \varrho_M$. Dados dos D-comódulos por la derecha (M, ϱ_M) y (N, ϱ_N), $f : M \to N$ es un morfismo de D-comódulos por la derecha si $\varrho_N \circ f = (f \otimes D) \circ \varrho_M$.

Definición 1.2.3. Sea $D \in |\mathcal{C}|$ y $t_{D,D} : D \otimes D \to D \otimes D$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Se dice que $t_{D,D}$ satisface la ecuación de Yang-Baxter si

$$(t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (t_{D,D} \otimes D) = (D \otimes t_{D,D}) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}). \quad (1.1)$$

Definición 1.2.4. [[4], Definición 1.2] Sea $D \in |\mathcal{C}|$. Un operador Yang-Baxter débil es un morfismo $t_{D,D} : D \otimes D \to D \otimes D$ en $\mathcal{C}$ tal que:

(a1) $t_{D,D}$ satisface la ecuación de Yang-Baxter.

(a2) Existe un morfismo idempotente $\nabla_{D,D} : D \otimes D \to D \otimes D$ tal que:

- (a2-1) $(\nabla_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes \nabla_{D,D}) = (D \otimes \nabla_{D,D}) \circ (\nabla_{D,D} \otimes D)$,
- (a2-2) $(\nabla_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) = (D \otimes t_{D,D}) \circ (\nabla_{D,D} \otimes D)$,
- (a2-3) $(t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes \nabla_{D,D}) = (D \otimes \nabla_{D,D}) \circ (t_{D,D} \otimes D)$,
- (a2-4) $t_{D,D} \circ \nabla_{D,D} = \nabla_{D,D} \circ t_{D,D} = t_{D,D}$.

(a3) Existe un morfismo $t'_{D,D} : D \otimes D \to D \otimes D$ tal que:

- (a3-1) El morfismo $p_{D,D} \circ t_{D,D} \circ i_{D,D} : D \times D \to D \times D$ es un isomorfismo con inverso $p_{D,D} \circ t'_{D,D} \circ i_{D,D} : D \times D \to D \times D$, donde $p_{D,D}$ e $i_{D,D}$ son los morfismos tales que $i_{D,D} \circ p_{D,D} = \nabla_{D,D}$ y $p_{D,D} \circ i_{D,D} = id_{D \times D}$ siendo $D \times D$ la imagen de $\nabla_{D,D}$.

(a3-2) $t'_{D,D} \circ \nabla_{D,D} = \nabla_{D,D} \circ t'_{D,D} = t'_{D,D}$.

A partir de los axiomas de la Definición 1.2.4 se deduce que

$$t'_{D,D} \circ t_{D,D} = t_{D,D} \circ t'_{D,D} = \nabla_{D,D}. \tag{1.2}$$

De hecho existe un vínculo muy estrecho entre los operadores $t_{D,D}$ y $t'_{D,D}$, de tal modo que las propiedades de cada uno de ellos determinan las del otro. En concreto:

Observación 1.2.5. Apoyándose en la definición (véase la Definición 1.2 y la Proposición 1.3 de [4]), resulta que $t_{D,D}$ es un operador Yang-Baxter débil con idempotente asociado $\nabla_{D,D}$ si y sólo si $t'_{D,D}$ es un operador Yang-Baxter débil con idempotente asociado $\nabla_{D,D}$. Como consecuencia, cuando $\nabla_{D,D} = id_{D\otimes D}$, $t_{D,D}$ es un isomorfismo y se recupera la definición clásica de operador Yang-Baxter introducida por Joyal y Street en [58].

Ejemplos 1.2.6. (1) Las categorías de módulos Yetter-Drinfeld sobre álgebras de Hopf débiles dan lugar a ejemplos no triviales de operadores Yang-Baxter débiles. Un álgebra de Hopf débil (en lo sucesivo AHD) H en una categoría monoidal simétrica $\mathcal{C}$ es un objeto en $\mathcal{C}$ con una estructura de álgebra (H, η_H, μ_H) y una estructura de coálgebra $(H, \varepsilon_H, \delta_H)$ tal que se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\delta_H \circ \mu_H = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ \delta_{H\otimes H}$,

(ii) $\varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\mu_H \otimes H) = (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H) \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \delta_H \otimes H)$

$= (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H) \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes (c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes H)$,

(iii) $(\delta_H \otimes H) \circ \delta_H \circ \eta_H = (H \otimes \mu_H \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \circ (\eta_H \otimes \eta_H)$

$= (H \otimes (\mu_H \circ c_{H,H}) \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \circ (\eta_H \otimes \eta_H)$.

(iv) Existe un morfismo $\lambda_H : H \to H$ en $\mathcal{C}$ (llamado el antípodo de H) satisfaciendo:

(iv-1) $id_H \wedge \lambda_H = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H)$,
(iv-2) $\lambda_H \wedge id_H = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H))$,

(iv-3) $\lambda_H \wedge id_H \wedge \lambda_H = \lambda_H$.

Si definimos los morfismos Π_H^L (imagen), Π_H^R (fuente), como

$$\Pi_H^L = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H),$$

$$\Pi_H^R = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)),$$

se prueba de forma inmediata que son idempotentes.

La primera familia de ejemplos de álgebras de Hopf débiles proviene de la teoría de álgebras de grupoide. Recordemos que un grupoide G es una categoría pequeña donde todos los morfismos son isomorfismos. En este ejemplo consideramos grupoides finitos, es decir, grupoides con un número finito de objetos. El conjunto de objetos de G, también llamado base de G, se denotará por G_0, y el conjunto de morfismos por G_1. El morfismo identidad en $x \in G_0$ se denotará por id_x y para un morfismo $\sigma : x \to y$ en G_1, escribiremos $s(\sigma)$ y $t(\sigma)$ para denotar la fuente y la imagen de σ respectivamente.

Sea G un grupoide y R un anillo conmutativo. El álgebra de grupoide es el producto directo en R-Mod

$$RG = \bigoplus_{\sigma \in G_1} R\sigma,$$

siendo el producto de dos morfismos igual a su composición si esta última está definida y 0 en caso contrario, es decir, $\mu_{RG}(\tau \otimes \sigma) = \tau \circ \sigma$ si $s(\tau) = t(\sigma)$ y $\mu_{RG}(\tau \otimes \sigma) = 0$ si $s(\tau) \neq t(\sigma)$. El elemento unidad es $1_{RG} = \sum_{x \in G_0} id_x$. El álgebra RG es un álgebra de Hopf débil coconmutativa, con coproducto δ_{RG}, counidad ε_{RG} y antípodo λ_{RG} dados por las fórmulas:

$$\delta_{RG}(\sigma) = \sigma \otimes \sigma, \quad \varepsilon_{RG}(\sigma) = 1, \quad \lambda_{RG}(\sigma) = \sigma^{-1}.$$

Para el álgebra de Hopf débil RG los morfismos imagen y fuente son, respectivamente,

$$\Pi_{RG}^L(\sigma) = id_{t(\sigma)}, \quad \Pi_{RG}^R(\sigma) = id_{s(\sigma)};$$

y se cumple también que $\lambda_{RG} \circ \lambda_{RG} = id_{RG}$.

Sea H un álgebra de Hopf débil en $\mathcal{C}$. Si (M, φ_M) y (N, φ_N) son H-módulos por la izquierda, denotamos por $\varphi_{M\otimes N}$ el morfismo $\varphi_{M\otimes N} : H \otimes M \otimes N \to M \otimes N$ definido por

$$\varphi_{M\otimes N} = (\varphi_M \otimes \varphi_N) \circ (H \otimes c_{H,M} \otimes N) \circ (\delta_H \otimes M \otimes N).$$

Dados dos H-comódulos por la izquierda (M, ϱ_M) y (N, ϱ_N), denotamos por $\varrho_{M\otimes N}$ el morfismo $\varrho_{M\otimes N} : M \otimes N \to H \otimes M \otimes N$ definido por

$$\varrho_{M\otimes N} = (\mu_H \otimes M \otimes N) \circ (H \otimes c_{M,H} \otimes N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N).$$

Sean (M, φ_M), (N, φ_N) dos H-módulos por la izquierda. El morfismo

$$\nabla_{M\otimes N} = \varphi_{M\otimes N} \circ (\eta_H \otimes M \otimes N) : M \otimes N \to M \otimes N$$

es idempotente. En este contexto denotamos por $M \times N$ la imagen de $\nabla_{M\otimes N}$ y por $p_{M\otimes N} : M \otimes N \to M \times N$, $i_{M\otimes N} : M \times N \to M \otimes N$ los morfismos tales que $i_{M\otimes N} \circ p_{M\otimes N} = \nabla_{M\otimes N}$ y $p_{M\otimes N} \circ i_{M\otimes N} = id_{M\times N}$. Es sencillo ver que el objeto $M \times N$ es un H-módulo por la izquierda con acción $\varphi_{M\times N} = p_{M\otimes N} \circ \varphi_{M\otimes N} \circ (H \otimes i_{M\otimes N}) : H \otimes (M \times N) \to M \times N$ (véase [76]).

De modo similar, si (M, ϱ_M) y (N, ϱ_N) son H-comódulos por la izquierda, el morfismo

$$\nabla'_{M\otimes N} = (\varepsilon_H \otimes M \otimes N) \circ \varrho_{M\otimes N} : M \otimes N \to M \otimes N$$

es idempotente. Denotamos por $M \odot N$ la imagen de $\nabla'_{M\otimes N}$ y por $p'_{M\otimes N} : M \otimes N \to M \odot N$, $i'_{M\otimes N} : M \odot N \to M \otimes N$ los morfismos tales que $i'_{M\otimes N} \circ p'_{M\otimes N} = \nabla'_{M\otimes N}$ y $p'_{M\otimes N} \circ i'_{M\otimes N} = id_{M\odot N}$. De forma similar al caso anterior, $M \odot N$ es un H-comódulo por la izquierda con coacción $\varrho_{M\odot N} = (H \otimes p'_{M\otimes N}) \circ \varrho_{M\otimes N} \circ i'_{M\otimes N} : M \odot N \to H \otimes (M \odot N)$.

Denotamos por ${}^H_H\mathcal{YD}$ la categoría de módulos Yetter-Drinfeld sobre H, siendo sus objetos los triples (M, φ_M, ρ_M) tales que (M, φ_M) es un H-módulo por la izquierda, (M, ρ_M) es un H-comódulo por la izquierda y se cumple que

(yd1) $\rho_M = (\mu_H \otimes \varphi_M) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes \rho_M) \circ (\eta_D \otimes M)$.

(yd2)
$$(\mu_H \otimes M) \circ (H \otimes c_{M,H}) \circ ((\rho_M \circ \varphi_M) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ (\delta_H \otimes M)$$
$$= (\mu_H \otimes \varphi_M) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes M) \circ (\delta_H \otimes \rho_M).$$

Sean M, N en ${}_H^H\mathcal{Y}D$. El morfismo $f : M \to N$ es un morfismo de módulos Yetter-Drinfeld si $f \circ \varphi_M = \varphi_N \circ (D \otimes f)$ y $(D \otimes f) \circ \rho_M = \rho_N \circ f$.

Si $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ es un módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre H entonces se cumple la igualdad [[4], Proposición 1.12]:

$$\nabla_{M\otimes N} = \nabla'_{M\otimes N}. \tag{1.3}$$

Entonces, como consecuencia de (1.3), si H es un álgebra de Hopf débil en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible, la categoría ${}_H^H\mathcal{YD}$ es una categoría monoidal trenzada no estricta. Exponemos brevemente la estructura monoidal.

Dados dos triples $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ y $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ en ${}_H^H\mathcal{YD}$, el producto tensor se define, como objeto, como la imagen de $\nabla_{M\otimes N}$. Por (1.3), $M \times N = M \odot N$ y este objeto es un módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda con las siguientes acción y coacción:

$$\varphi_{M\times N} = p_{M\otimes N} \circ \varphi_{M\otimes N} \circ (H \otimes i_{M\otimes N}),$$

$$\varrho_{M\times N} = (H \otimes p_{M\otimes N}) \circ \varrho_{M\otimes N} \circ i_{M\otimes N}.$$

El objeto base es la imagen del morfismo imagen, denotándose por H_L. Este objeto es un módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda con acción y coacción

$$\varphi_{H_L} = p_L \circ \mu_H \circ (H \otimes i_L), \quad \varrho_{H_L} = (H \otimes p_L) \circ \delta_H \circ i_L,$$

donde $p_L : H \to H_L$ y $i_L : H_L \to H$ son los morfismos tales que $\Pi_H^L = i_L \circ p_L$ y $p_L \circ i_L = id_{H_L}$.

Los isomorfismos naturales de unidad son:

$$\mathfrak{l}_M = \varphi_M \circ (i_L \otimes M) \circ i_{H_L\otimes M} : H_L \times M \to M,$$

$$\mathfrak{r}_M = \varphi_M \circ c_{M,H} \circ (M \otimes (\overline{\Pi}_H^L \circ i_L)) \circ i_{M\otimes H_L} : M \times H_L \to M.$$

Estos morfismos son isomorfismos con inversos

$$\mathfrak{l}_M^{-1} = p_{H_L\otimes M} \circ (p_L \otimes \varphi_M) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes M) : M \to H_L \times M,$$

$$\mathfrak{r}_M^{-1} = p_{M\otimes H_L} \circ (\varphi_M \otimes p_L) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes M) : M \to M \times H_L.$$

Si M, N, P son objetos en la categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$, el isomorfismo natural de asociatividad

$$\mathfrak{a}_{M,N,P} : M \times (N \times P) \to (M \times N) \times P$$

se define como

$$\mathfrak{a}_{M,N,P} = p_{(M\times N)\otimes P} \circ (p_{M\otimes N} \otimes P) \circ (M \otimes i_{N\otimes P}) \circ i_{M\otimes(N\times P)},$$

y su inverso

$$\mathfrak{a}^{-1}_{M,N,P} : (M \times N) \times P \to M \times (N \times P)$$

se definido como

$$\mathfrak{a}^{-1}_{M,N,P} = p_{M\otimes(N\times P)} \circ (M \otimes p_{N\otimes P}) \circ (i_{M\otimes N} \otimes P) \circ i_{(M\times N)\otimes P}.$$

Si $\gamma : M \to M'$ y $\phi : N \to N'$ so morfismos en la categoría, definimos

$$\gamma \times \phi = p_{M'\times N'} \circ (\gamma \otimes \phi) \circ i_{M\otimes N} : M \times N \to M' \times N',$$

que es un morfismo en ${}^H_H\mathcal{YD}$, y si $\gamma' : M' \to M''$ y $\phi' : N' \to N''$ son morfismos en ${}^H_H\mathcal{YD}$, entonces

$$(\gamma' \times \phi') \circ (\gamma \times \phi) = (\gamma' \circ \gamma) \times (\phi' \circ \phi).$$

Finalmente, la trenza es

$$\tau_{M,N} = p_{N\otimes M} \circ t_{M,N} \circ i_{M\otimes N} : M \times N \to N \times M, \tag{1.4}$$

donde

$$t_{M,N} = (\varphi_N \otimes M) \circ (H \otimes c_{M,N}) \circ (\varrho_M \otimes N) : M \otimes N \to N \otimes M. \tag{1.5}$$

El morfismo $\tau_{M,N}$ es un isomorfismo natural con inverso

$$\tau^{-1}_{M,N} = p_{M\otimes N} \circ t'_{M,N} \circ i_{N\otimes M} : N \times M \to M \times N, \tag{1.6}$$

donde

$$t'_{M,N} = c_{N,M} \circ (\varphi_N \otimes M) \circ (c_{N,H} \otimes M) \circ (N \otimes \lambda^{-1}_H \otimes M) \circ (N \otimes \varrho_M). \tag{1.7}$$

Por [[4], Proposición 1.15] tenemos que dado $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$, el morfismo $t_{M,M} : M \otimes M \to M \otimes M$ definido en (1.5) por

$$t_{M,M} = (\varphi_M \otimes M) \circ (H \otimes c_{M,M}) \circ (\varrho_M \otimes M)$$

es un operador Yang-Baxter débil, donde por (1.7) tenemos que

$$t'_{M,M} = c_{M,M} \circ (\varphi_M \otimes M) \circ (c_{M,H} \otimes M) \circ (M \otimes \lambda_H^{-1} \otimes M) \circ (M \otimes \varrho_M)$$

y $\nabla_{M,M} = \nabla_{M \otimes M}$.

Puede obtenerse un resultado similar trabajando con módulos Yetter-Drinfeld asociados a un álgebra de Hopf débil en una categoría monoidal trenzada (véase [9]).

(2) Todo morfismo idempotente $\Omega : D \otimes D \to D \otimes D$ tal que

$$(\Omega \otimes D) \circ (D \otimes \Omega) = (D \otimes \Omega) \circ (\Omega \otimes D) \tag{1.8}$$

es un operador Yang-Baxter débil donde $t_{D,D} = t'_{D,D} = \nabla_{D,D} = \Omega$.

Entonces, como consecuencia de (a2-1), el morfismo idempotente $\nabla_{D,D}$ de la Definición 1.2.4 es un ejemplo de operador Yang-Baxter débil.

Es posible construir más ejemplos de este tipo de operadores Yang-Baxter débiles trabajando con factorizaciones exactas de grupoides. Recordamos previamente la definición de subgrupoide amplio. Un subgrupoide ancho de un grupoide G es un grupoide H tal que es una subcategoría de G dotada de un funtor $F : H \to G$ que actúa como la identidad sobre los objetos e induce inclusiones $hom_H(x, y) \subset hom_G(x, y)$, es decir, tiene la misma base y (puede que) menos flechas.

Sea G un grupoide. Una factorización exacta de G es un par de subgrupoides amplios de G, H y V, tal que para cualquier $\sigma \in G_1$, existen unos únicos $\sigma_V \in V_1$, $\sigma_H \in H_1$, cumpliendo que $\sigma = \sigma_H \circ \sigma_V$.

Si G es un grupoide con factorización exacta definimos

$$\Omega : RG \otimes RG \to RG \otimes RG$$

como

$$\Omega(\sigma \otimes \tau) = \sigma_H \otimes \tau_V.$$

Entonces Ω es un morfismo idempotente cumpliendo (1.8), por lo que es un operador Yang-Baxter débil.

(3) Sea D un álgebra en una categoría monoidal trenzada $\mathcal{C}$. Entonces, el morfismo idempotente

$$\Omega = \eta_D \otimes (\mu_D \circ c_{D,D}) : D \otimes D \to D \otimes D$$

no satisface (1.8), pero es un operador Yang-Baxter débil donde

$$t_{D,D} = t'_{D,D} = \nabla_{D,D} = \Omega.$$

Se cumple también que si D es una coálgebra en $\mathcal{C}$, entonces el morfismo idempotente

$$\Omega' = \varepsilon_D \otimes (c_{D,D} \circ \delta_D) : D \otimes D \to D \otimes D$$

es un operador Yang-Baxter débil donde

$$t_{D,D} = t'_{D,D} = \nabla_{D,D} = \Omega'.$$

Proposición 1.2.7. *Sea $D \in |\mathcal{C}|$. Con la notación de la Definición 1.2.4, si consideramos el par de morfismos $t_{D,D} : D \otimes D \to D \otimes D$ satisfaciendo (a2) y $t'_{D,D} : D \otimes D \to D \otimes D$ satisfaciendo (a3), entonces la aplicación $t_{D,D}$ cumple la ecuación de Yang-Baxter si y sólo si $t'_{D,D}$ también la cumple.*

Prueba:
Por (1.2), (a3-2), (a2-1) y (a2-2) se obtiene

$$(\nabla_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}) = (D \otimes t'_{D,D}) \circ (\nabla_{D,D} \otimes D), \tag{1.9}$$

y mediante argumentos análogos se deduce que

$$(t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes \nabla_{D,D}) = (D \otimes \nabla_{D,D}) \circ (t'_{D,D} \otimes D). \tag{1.10}$$

Ahora, componiendo con $D \otimes t'_{D,D}$ y $t'_{D,D} \otimes D$ en (1.1) y aplicando (a2-3), (a2-4) y (1.2) resulta

$$(t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (t_{D,D} \otimes D) = (D \otimes t_{D,D}) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}).$$

Usando el mismo argumento se obtiene:

$$(t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}) \circ (t'_{D,D} \otimes D) = (D \otimes t'_{D,D}) \circ (t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}).$$

$\square$

Observación 1.2.8. Nótese que en la demostración de la proposición anterior se obtuvo la igualdad:

$$(t'_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes t_{D,D})\circ(t_{D,D}\otimes D) = (D\otimes t_{D,D})\circ(t_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes t'_{D,D}), \quad (1.11)$$

e intercambiando el orden de composición con $D \otimes t'_{D,D}$ y $t'_{D,D} \otimes D$ en (1.1) resulta:

$$(D\otimes t'_{D,D})\circ(t_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes t_{D,D}) = (t_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes t_{D,D})\circ(t'_{D,D}\otimes D). \quad (1.12)$$

Son también ciertas las igualdades obtenidas al sustituir en todos los casos $t_{D,D}$ por $t'_{D,D}$ y viceversa.

Definición 1.2.9. Una biálgebra trenzada débil (en lo sucesivo BTD) es un objeto D en $\mathcal{C}$ con una estructura de álgebra (D, η_D, μ_D) y una estructura de coálgebra $(D, \varepsilon_D, \delta_D)$ de modo que existe un operador Yang-Baxter débil $t_{D,D} : D \otimes D \to D \otimes D$ con idempotente asociado $\nabla_{D,D}$ de forma que:

(b1) Se tiene

- (b1-1) $\mu_D \circ \nabla_{D,D} = \mu_D$,
- (b1-2) $\nabla_{D,D} \circ (\mu_D \otimes D) = (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes \nabla_{D,D})$,
- (b1-3) $\nabla_{D,D} \circ (D \otimes \mu_D) = (D \otimes \mu_D) \circ (\nabla_{D,D} \otimes D)$.

(b2) Se tiene

- (b2-1) $\nabla_{D,D} \circ \delta_D = \delta_D$,
- (b2-2) $(\delta_D \otimes D) \circ \nabla_{D,D} = (D \otimes \nabla_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D)$,
- (b2-3) $(D \otimes \delta_D) \circ \nabla_{D,D} = (\nabla_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes \delta_D)$.

(b3) Se tiene

- (b3-1) $t_{D,D} \circ (\mu_D \otimes D) = (D \otimes \mu_D) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D})$,
- (b3-2) $t_{D,D} \circ (D \otimes \mu_D) = (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (t_{D,D} \otimes D)$,
- (b3-3) $(\delta_D \otimes D) \circ t_{D,D} = (D \otimes t_{D,D}) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes \delta_D)$,
- (b3-4) $(D \otimes \delta_D) \circ t_{D,D} = (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D)$.

(b4) $\delta_D \circ \mu_D = (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D)$.

(b5) $\varepsilon_D \circ \mu_D \circ (\mu_D \otimes D) = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (D \otimes \delta_D \otimes D)$

$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (D \otimes (t'_{D,D} \circ \delta_D) \otimes D)$.

(b6) $(\delta_D \otimes D) \circ \delta_D \circ \eta_D = (D \otimes \mu_D \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\delta_D \circ \eta_D))$

$= (D \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\delta_D \circ \eta_D))$.

Una BTD se dice un álgebra de Hopf trenzada débil (en lo sucesivo AHTD) si además de cumplirse todas las condiciones anteriores se tiene que:

(b7) Existe un morfismo $\lambda_D : D \to D$ en $\mathcal{C}$ (denominado el antípodo de D) tal que:

(b7-1) $id_D \wedge \lambda_D = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D)$,
(b7-2) $\lambda_D \wedge id_D = (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D))$,
(b7-3) $\lambda_D \wedge id_D \wedge \lambda_D = \lambda_D$.

Ejemplos 1.2.10. (1) Si en la definición previa se asume además que $\mathcal{C}$ es simétrica y $t_{D,D} = t'_{D,D}$ es la trenza de $\mathcal{C}$, entonces $\nabla_{D,D} = id_{D\otimes D}$ y obtenemos la definición de AHD (véase (1) de Ejemplos 1.2.6). Además, si $\mathcal{C}$ es una categoría trenzada con trenza c, $t_{D,D} = c_{D,D}$ y $t'_{D,D} = c^{-1}_{D,D}$, entonces $\nabla_{D,D} = id_{D\otimes D}$ y decimos que D es un AHD en la categoría trenzada $\mathcal{C}$. Esto es: D es un álgebra-coálgebra satisfaciendo los axiomas siguientes:

(c1) $\delta_D \circ \mu_D = (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes c_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D)$.

(c2) $\varepsilon_D \circ \mu_D \circ (\mu_D \otimes D) = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (D \otimes \delta_D \otimes D)$

$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (D \otimes (c^{-1}_{D,D} \circ \delta_D) \otimes D)$.

(c3) $(\delta_D \otimes D) \circ \delta_D \circ \eta_D = (D \otimes \mu_D \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\delta_D \circ \eta_D))$

$= (D \otimes (\mu_D \circ c^{-1}_{D,D}) \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\delta_D \circ \eta_D))$.

(c4) Existe un morfismo $\lambda_D : D \to D$ en $\mathcal{C}$ (llamado antípodo de D) cumpliendo:

(c4-1) $id_D \wedge \lambda_D = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (D \otimes c_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D)$,

(c4-2) $\lambda_D \wedge id_D = (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (c_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D))$,

(c4-3) $\lambda_D \wedge id_D \wedge \lambda_D = \lambda_D$.

En una categoría monoidal trenzada la noción clásica de álgebra de Hopf se define como un álgebra-coálgebra D satisfaciendo las condiciones

(i) $\delta_D \circ \mu_D = (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes c_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D)$.

(ii) $\varepsilon_D \circ \mu_D = \varepsilon_D \otimes \varepsilon_D$.

(iii) $\delta_D \circ \eta_D = \eta_D \otimes \eta_D$.

(iv) Existe un morfismo λ_D en $\mathcal{C}$ tal que $id_D \wedge \lambda_D = \lambda_D \wedge id_D = \varepsilon_D \otimes \eta_D$.

Obviamente, las álgebras de Hopf clásicas son álgebras de Hopf débiles en este contexto y es sencillo demostrar que que las álgebras de Hopf trenzadas introducidas por Takeuchi en [90] son ejemplos de AHTD.

(2) Sea H un álgebra de Hopf débil en una categoría monoidal simétrica tal que su antípodo λ_H es un isomorfismo. Por (1) de Ejemplos 1.2.6 sabemos que la categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$ de módulos Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda es una categoría monoidal trenzada no estricta.

Un objeto $(A, \varphi_A, \varrho_A)$ de ${}^H_H\mathcal{YD}$ se dice un álgebra si existen morfismos $u_A : H_L \to A$ y $m_A : A \times A \to A$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$ tales que

$$m_A \circ (u_A \times A) \circ \mathfrak{l}_A^{-1} = id_A = m_A \circ (A \times u_A) \circ \mathfrak{r}_A^{-1}, \tag{1.13}$$

$$m_A \circ (m_A \times A) \circ \mathfrak{a}_{A,A,A} = m_A \circ (A \times m_A). \tag{1.14}$$

Análogamente, un objeto $(C, \varphi_C, \varrho_C)$ de ${}^H_H\mathcal{YD}$ se dice una coálgebra si existen morfismos $e_C : C \to H_L$ y $\Delta_C : C \to C \times C$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$ tales que

$$\mathfrak{l}_C \circ (e_C \times C) \circ \Delta_C = id_C = \mathfrak{r}_C \circ (C \times e_C) \circ \Delta_C, \tag{1.15}$$

$$(C \times \Delta_C) \circ \Delta_C = \mathfrak{a}_{C,C,C} \circ (\Delta_C \times C) \circ \Delta_C. \tag{1.16}$$

Se dice que $(D, u_D, m_D, e_D, \Delta_D)$ es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$ si es un álgebra-coálgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$, y además existe un morfismo $\lambda_D : D \to D$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$ (llamado el antípodo e D) tal que:

(d1) $\Delta_D \circ m_D = (m_D \times m_D) \circ \mathfrak{a}_{D,D,D\times D} \circ (D \times \mathfrak{a}^{-1}_{D,D,D}) \circ (D \times (\tau_{D,D} \times D)) \circ (D \times \mathfrak{a}_{D,D,D})\circ$

$$\mathfrak{a}^{-1}_{D,D,D\times D} \circ (\Delta_D \times \Delta_D),$$

(d2) $\Delta_D \circ u_D = (u_D \times u_D) \circ \mathfrak{l}^{-1}_{H_L}$,

(d3) $m_D \circ (D \times \lambda_D) \circ \Delta_D = m_D \circ (\lambda_D \times D) \circ \Delta_D = \mathfrak{r}_D \circ (u_D \times e_D) \circ \mathfrak{l}^{-1}_D$.

Si definimos $\eta_D = u_D \circ p_L \circ \eta_H$, $\mu_D = m_D \circ p_{D\otimes D}$, $\varepsilon_D = \varepsilon_H \circ i_L \circ e_D$ y $\delta_D = i_{D\otimes D} \circ \Delta_D$, tenemos que $(D, \eta_D, \mu_D, \varepsilon_D, \delta_D, \lambda_D)$ es un AHTD en $\mathcal{C}$ [[4], Corolario 2.14]. Nótese que este es un ejemplo no trivial, es decir, D no es un álgebra de Hopf ni un AHD en el sentido usual. Por ejemplo, D no es un álgebra de Hopf porque si asumimos que $\varepsilon_D \circ \mu_D = \varepsilon_D \otimes \varepsilon_D$, entonces obtenemos que $\Pi^L_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H$, o equivalentemente, H es un álgebra de Hopf en $\mathcal{C}$ [[4], Observación 2.15]. Mediante un cálculo análogo, si $\eta_D \otimes \eta_D = \delta_D \circ \eta_D$, entonces obtenemos que H es un álgebra de Hopf. Además, si $\lambda_D \wedge id_D = \varepsilon_D \otimes \eta_D$, tenemos que $u_D \circ e_D = \eta_D \circ \varepsilon_D$, y entonces $id_{H_L} = p_L \circ \eta_H \circ \varepsilon_H \circ i_L$. Por lo tanto, $\Pi^L_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H$ y obtenemos que H es también un álgebra de Hopf. Finalmente, D no es un álgebra de Hopf débil porque la condición (d1) equivale a que

$$\Delta_D \circ m_D = p_{D,D} \circ (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D) \circ i_{D,D}$$

[[4], Proposición 2.8], y esta última igualdad no implica que

$$\delta_D \circ \mu_D = (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes c_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D),$$

donde $c_{D,D}$ es la trenza simétrica de $\mathcal{C}$.

1.2.11. Como consecuencia directa de la definición de BTD se siguen las identidades:

$$t_{D,D} \circ (\eta_D \otimes D) = \nabla_{D,D} \circ (D \otimes \eta_D), \tag{1.17}$$

$$t_{D,D} \circ (D \otimes \eta_D) = \nabla_{D,D} \circ (\eta_D \otimes D), \tag{1.18}$$

$$(D \otimes \varepsilon_D) \circ t_{D,D} = (\varepsilon_D \otimes D) \circ \nabla_{D,D}, \tag{1.19}$$

$$(\varepsilon_D \otimes D) \circ t_{D,D} = (D \otimes \varepsilon_D) \circ \nabla_{D,D} \tag{1.20}$$

y las que resultan al cambiar $t_{D,D}$ por $t'{}_{D,D}$ en (1.17), (1.18), (1.19) y (1.20). También se cumple:

$$t'_{D,D} \circ (\mu_D \otimes D) = (D \otimes \mu_D) \circ (t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}), \tag{1.21}$$

$$t'_{D,D} \circ (D \otimes \mu_D) = (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}) \circ (t'_{D,D} \otimes D), \tag{1.22}$$

$$(\delta_D \otimes D) \circ t'_{D,D} = (D \otimes t'_{D,D}) \circ (t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes \delta_D), \tag{1.23}$$

$$(D \otimes \delta_D) \circ t'_{D,D} = (t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D), \tag{1.24}$$

(ver [5]).

Además por [[5], Lema 2.2] tenemos que:

$$(D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (t_{D,D} \otimes D) = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}), \tag{1.25}$$

$$((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) = (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (t'_{D,D} \otimes D), \tag{1.26}$$

$$(D \otimes t_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D) = (t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D)), \tag{1.27}$$

$$(t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D)) = (D \otimes t'_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D). \tag{1.28}$$

1.2.12. Para un AHTD los morfismos fuente e imagen se definen como:

$$\Pi_D^L = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D),$$

$$\Pi_D^R = (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ ((D \otimes (\delta_D \circ \eta_D)).$$

Se consideran también los morfismos $\overline{\Pi}_D^L$ y $\overline{\Pi}_D^R$ definidos como:

$$\overline{\Pi}_D^L = (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D),$$

$$\overline{\Pi}_D^R = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D)).$$

Si D es una BTD es sencillo demostrar que todos ellos son idempotentes y mantienen la unidad y la counidad invariantes [[5], Proposición 2.9]. Los morfismos fuente e imagen cumplen que:

$$\Pi_D^L = id_D \wedge \lambda_D, \quad \Pi_D^R = \lambda_D \wedge id_D, \quad \lambda_D = \lambda_D \wedge \Pi_D^L = \Pi_D^R \wedge \lambda_D, \tag{1.29}$$

y por (b4) resulta

$$id_D \wedge \lambda_D \wedge id_D = \Pi_D^L \wedge id_D = id_D \wedge \Pi_D^R = id_D. \tag{1.30}$$

Además, se cumple que [[5], Proposición 2.10]

$$\Pi_D^L \circ \overline{\Pi}_D^L = \Pi_D^L, \quad \Pi_D^L \circ \overline{\Pi}_D^R = \overline{\Pi}_D^R, \quad \overline{\Pi}_D^L \circ \Pi_D^L = \overline{\Pi}_D^L, \quad \overline{\Pi}_D^R \circ \Pi_D^L = \Pi_D^L, \tag{1.31}$$

$$\Pi_D^R \circ \overline{\Pi}_D^L = \overline{\Pi}_D^L, \quad \Pi_D^R \circ \overline{\Pi}_D^R = \Pi_D^R, \quad \overline{\Pi}_D^L \circ \Pi_D^R = \Pi_D^R, \quad \overline{\Pi}_D^R \circ \Pi_D^R = \overline{\Pi}_D^R, \tag{1.32}$$

$$\Pi_D^L \circ \lambda_D = \Pi_D^L \circ \Pi_D^R = \lambda_D \circ \Pi_D^R, \quad \Pi_D^R \circ \lambda_D = \Pi_D^R \circ \Pi_D^L = \lambda_D \circ \Pi_D^L, \tag{1.33}$$

$$\Pi_D^L = \overline{\Pi}_D^R \circ \lambda_D = \lambda_D \circ \overline{\Pi}_D^L, \quad \Pi_D^R = \overline{\Pi}_D^L \circ \lambda_D = \lambda_D \circ \overline{\Pi}_D^R, \tag{1.34}$$

y que [[5], Proposición 2.11, Corolario 2.14]:

$$t_{D,D}\circ(\Pi_D^{\bullet}\otimes D) = (D\otimes\Pi_D^{\bullet})\circ t_{D,D}, \quad t'_{D,D}\circ(\Pi_D^{\bullet}\otimes D) = (D\otimes\Pi_D^{\bullet})\circ t'_{D,D}, \tag{1.35}$$

$$t_{D,D}\circ(D\otimes\Pi_D^{\bullet}) = (\Pi_D^{\bullet}\otimes D)\circ t_{D,D}, \quad t'_{D,D}\circ(D\otimes\Pi_D^{\bullet}) = (\Pi_D^{\bullet}\otimes D)\circ t'_{D,D}, \tag{1.36}$$

$$t_{D,D}\circ(\overline{\Pi}_D^{\bullet}\otimes D) = (D\otimes\overline{\Pi}_D^{\bullet})\circ t_{D,D}, \quad t'_{D,D}\circ(\overline{\Pi}_D^{\bullet}\otimes D) = (D\otimes\overline{\Pi}_D^{\bullet})\circ t'_{D,D}, \tag{1.37}$$

$$t_{D,D}\circ(D\otimes\overline{\Pi}_D^{\bullet}) = (\overline{\Pi}_D^{\bullet}\otimes D)\circ t_{D,D}, \quad t'_{D,D}\circ(D\otimes\overline{\Pi}_D^{\bullet}) = (\overline{\Pi}_D^{\bullet}\otimes D)\circ t'_{D,D}, \tag{1.38}$$

donde en cada igualdad $\bullet = R$ o $\bullet = L$.

Finalmente, tenemos que

$$\mu_D \circ (D \otimes \Pi_D^L) = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D), \tag{1.39}$$

$$\mu_D \circ (\Pi_D^R \otimes D) = (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes \delta_D), \tag{1.40}$$

$$\mu_D \circ (D \otimes \overline{\Pi}_D^L) = (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (\delta_D \otimes D), \tag{1.41}$$

$$\mu_D \circ (\overline{\Pi}_D^R \otimes D) = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (D \otimes \delta_D), \tag{1.42}$$

$$(D \otimes \Pi_D^L) \circ \delta_D = (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D), \tag{1.43}$$

$$(\Pi_D^R \otimes D) \circ \delta_D = (D \otimes \mu_D) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D)), \tag{1.44}$$

$$(\overline{\Pi}_D^L \otimes D) \circ \delta_D = (D \otimes \mu_D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D), \tag{1.45}$$

$$(D \otimes \overline{\Pi}_D^R) \circ \delta_D = (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D)), \tag{1.46}$$

$$(D \otimes \Pi_D^L) \circ \delta_D \circ \eta_D = \delta_D \circ \eta_D, \tag{1.47}$$

$$(\Pi_D^R \otimes D) \circ \delta_D \circ \eta_D = \delta_D \circ \eta_D, \tag{1.48}$$

$$\varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \Pi_D^L) = \varepsilon_D \circ \mu_D, \tag{1.49}$$

$$\varepsilon_D \circ \mu_D \circ (\Pi_D^R \otimes D) = \varepsilon_D \circ \mu_D, \tag{1.50}$$

$$(D \otimes \Pi_D^L) \circ \delta_D \circ \Pi_D^L = \delta_D \circ \Pi_D^L, \quad (\Pi_D^R \otimes D) \circ \delta_D \circ \Pi_D^R = \delta_D \circ \Pi_D^R, \tag{1.51}$$

$$\Pi_D^L \circ \mu_D \circ (D \otimes \Pi_D^L) = \Pi_D^L \circ \mu_D, \quad \Pi_D^R \circ \mu_D \circ (\Pi_D^R \otimes D) = \Pi_D^R \circ \mu_D, \tag{1.52}$$

cuyas pruebas pueden encontrarse en [[5], Proposiciones. 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 y 2.14, Observación 2.7].

En lo concerniente al comportamiento del antípodo se cumple que

$$t_{D,D} \circ (\lambda_D \otimes D) = (D \otimes \lambda_D) \circ t_{D,D}, \quad t'_{D,D} \circ (D \otimes \lambda_D) = (\lambda_D \otimes D) \circ t'_{D,D}, \tag{1.53}$$

$$t_{D,D} \circ (D \otimes \lambda_D) = (\lambda_D \otimes D) \circ t_{D,D}, \quad t'_{D,D} \circ (\lambda_D \otimes D) = (D \otimes \lambda_D) \circ t'_{D,D}, \tag{1.54}$$

$$\lambda_D \circ \mu_D = \mu_D \circ t_{D,D} \circ (\lambda_D \otimes \lambda_D), \quad \delta_D \circ \lambda_D = (\lambda_D \otimes \lambda_D) \circ t_{D,D} \circ \delta_D, \tag{1.55}$$

$$\lambda_D \circ \eta_D = \eta_D, \quad \varepsilon_D \circ \lambda_D = \varepsilon_D, \tag{1.56}$$

y en caso de que el antípodo sea inversible

$$\lambda_D^{-1} \circ \mu_D = \mu_D \circ t'_{D,D} \circ (\lambda_D^{-1} \otimes \lambda_D^{-1}), \quad \delta_D \circ \lambda_D^{-1} = (\lambda_D^{-1} \otimes \lambda_D^{-1}) \circ t'_{D,D} \circ \delta_D, \tag{1.57}$$

$$\lambda_D^{-1} \circ \eta_D = \eta_D, \quad \varepsilon_D \circ \lambda_D^{-1} = \varepsilon_D. \tag{1.58}$$

(Véase [[5], Proposiciones 2.12, 2.20]).

Definición 1.2.13. Dada una categoría monoidal $\mathcal{C}$, la categoría de las BTD es aquella cuyos objetos son las BTD y cuyos morfismos $f : D \to B$ son los morfismos de álgebras y coálgebras para los cuales se cumple que $t_{B,B} \circ (f \otimes f) = (f \otimes f) \circ t_{D,D}$ y $t'_{B,B} \circ (f \otimes f) = (f \otimes f) \circ t'_{D,D}$.

Análogamente se define la categoría de las AHTD.

Nótese que si $f : D \to B$ es un morfismo de BTD, en virtud de (1.2) se obtiene $\nabla_{B,B} \circ (f \otimes f) = (f \otimes f) \circ \nabla_{D,D}$. Además si $f : D \to B$ es un morfismo de AHTD se tiene que $f \circ \lambda_D = \lambda_B \circ f$ (véase [4]).

Para terminar esta sección se demuestran una serie de nuevos resultados que serán necesarios en los capítulos siguientes.

Lema 1.2.14. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Se cumple que:*

(i) $\delta_D \circ \Pi_D^L = (\mu_D \otimes D) \circ (\Pi_D^L \otimes (\delta_D \circ \eta_D)) = ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes D) \circ (\Pi_D^L \otimes (\delta_D \circ \eta_D))$.

(ii) $\Pi_D^L \circ \mu_D = (\Pi_D^L \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (\delta_D \otimes D) = (\Pi_D^L \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ ((t'_{D,D} \circ \delta_D) \otimes D)$.

(iii) $\delta_D \circ \Pi_D^R = (D \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \Pi_D^R) = (D \otimes \mu_D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \Pi_D^R)$.

(iv) $\Pi_D^R \circ \mu_D = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes \Pi_D^R) \circ (D \otimes (t'_{D,D} \circ \delta_D)) = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes \Pi_D^R) \circ (D \otimes \delta_D)$.

Prueba:

La prueba de (i) es la siguiente. Por un lado tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&(\mu_D \otimes D) \circ (\Pi_D^L \otimes (\delta_D \circ \eta_D)) \\
&= (D \otimes \overline{\Pi}_D^R) \circ \delta_D \circ \Pi_D^L \\
&= (D \otimes (\overline{\Pi}_D^R \circ \Pi_D^L)) \circ \delta_D \circ \Pi_D^L \\
&= (D \otimes \Pi_D^L) \circ \delta_D \circ \Pi_D^L \\
&= \delta_D \circ \Pi_D^L,
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue de (1.46), la segunda y la cuarta de (1.51) y la tercera de (1.31).

Por otro lado, utilizando (1.47) y (1.27) se deduce que:

$$
\begin{aligned}
&\delta_D \circ \Pi_D^L\\
&= (D \otimes \Pi_D^L) \circ \delta_D \circ \Pi_D^L\\
&= (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \circ \eta_D) \otimes \Pi_D^L)\\
&= ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes D) \circ (\Pi_D^L \otimes (\delta_D \circ \eta_D)).
\end{aligned}
$$

En cuanto al apartado (ii), la prueba puede realizarse siguiendo la misma estrategia general que en (i), pero intercambiando entre sí los papeles desempeñados por las propiedades de álgebra y coálgebra. Éste será un procedimiento aplicable en varias pruebas a lo largo de la memoria, por lo que lo explicitaremos con detalle en este primer lema.

Usando (1.52) dos veces, (1.31) y (1.41) se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&(\Pi_D^L \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (\delta_D \otimes D)\\
&= \Pi_D^L \circ \mu_D \circ (D \otimes \overline{\Pi}_D^L)\\
&= \Pi_D^L \circ \mu_D \circ (D \otimes (\Pi_D^L \circ \overline{\Pi}_D^L))\\
&= \Pi_D^L \circ \mu_D \circ (D \otimes \Pi_D^L)\\
&= \Pi_D^L \circ \mu_D.
\end{aligned}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
&(\Pi_D^L \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ ((t'_{D,D} \circ \delta_D) \otimes D)\\
&= (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes \Pi_D^L \otimes D) \circ (\delta_D \otimes D)\\
&= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (\mu_D \otimes t_{D,D}) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D \otimes D)\\
&= \Pi_D^L \circ \mu_D,
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la definición de Π_D^L, (b3-2) y la asociatividad de μ_D, la segunda de (1.43) y (1.26) y la tercera de (1.36).

En el apartado (iii), la primera igualdad se prueba utilizando (1.51), (1.44) y (1.28) de la siguiente forma:

$$
\delta_D \circ \Pi_D^R
$$

$$= (\Pi_D^R \otimes D) \circ \delta_D \circ \Pi_D^R$$

$$= (D \otimes \mu_D) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (\Pi_D^R \otimes (\delta_D \circ \eta_D))$$

$$= (D \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \Pi_D^R).$$

En lo que respecta a la segunda igualdad de este apartado se obtiene aplicando (1.51) junto con (1.32) y (1.45):

$$\delta_D \circ \Pi_D^R$$

$$= (\Pi_D^R \otimes D) \circ \delta_D \circ \Pi_D^R$$

$$= ((\overline{\Pi}_D^L \circ \Pi_D^R) \otimes D) \circ \delta_D \circ \Pi_D^R$$

$$= (\overline{\Pi}_D^L \otimes D) \circ \delta_D \circ \Pi_D^R$$

$$= (D \otimes \mu_D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \Pi_D^R).$$

Finalmente el apartado (iv) puede también probarse usando una demostración análoga a la desarrollada en (iii) pero intercambiando entre sí las propiedades de álgebra y coálgebra. La primera igualdad se deduce de (1.52), (1.50) y (1.25):

$$\Pi_D^R \circ \mu_D$$

$$= \Pi_D^R \circ \mu_D \circ (\Pi_D^R \otimes D)$$

$$= (\Pi_D^R \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes \delta_D)$$

$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes \Pi_D^R) \circ (D \otimes (t'_{D,D} \circ \delta_D)).$$

Por otra parte, aplicando (1.52) dos veces, (1.32) y (1.42):

$$\Pi_D^R \circ \mu_D$$

$$= \Pi_D^R \circ \mu_D \circ (\Pi_D^R \otimes D)$$

$$= \Pi_D^R \circ \mu_D \circ ((\Pi_D^R \circ \overline{\Pi}_D^R) \otimes D)$$

$$= \Pi_D^R \circ \mu_D \circ (\overline{\Pi}_D^R \otimes D)$$

$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes \Pi_D^R) \circ (D \otimes \delta_D).$$

□

Teorema 1.2.15. *Sea* $(D, \eta_D, \mu_D, \varepsilon_D, \delta_D)$ *una BTD en* $\mathcal{C}$ *con operador Yang-Baxter débil asociado* $t_{D,D}$. *Entonces:*

(i) $D^{op} = (D, \eta_{D^{op}}, \mu_{D^{op}}, \varepsilon_{D^{op}}, \delta_{D^{op}})$ *con*

$$\eta_{D^{op}} = \eta_D, \mu_{D^{op}} = \mu_D \circ t'_{D,D}, \varepsilon_{D^{op}} = \varepsilon_D, \delta_{D^{op}} = \delta_D$$

y operador Yang-Baxter débil asociado $t_{D^{op},D^{op}} = t'_{D,D}$ *es una BTD.*

(ii) $D^{coop} = (D, \eta_{D^{coop}}, \mu_{D^{coop}}, \varepsilon_{D^{coop}}, \delta_{D^{coop}})$ *con*

$$\eta_{D^{coop}} = \eta_D, \mu_{D^{coop}} = \mu_D, \varepsilon_{D^{coop}} = \varepsilon_D, \delta_{D^{coop}} = t'_{D,D} \circ \delta_D$$

y operador Yang-Baxter débil asociado $t_{D^{coop},D^{coop}} = t'_{D,D}$ *es una BTD.*

(iii) $D^{op^{coop}} = (D, \eta_{D^{op^{coop}}}, \mu_{D^{op^{coop}}}, \varepsilon_{D^{op^{coop}}}, \delta_{D^{op^{coop}}})$ *con*

$$\eta_{D^{op^{coop}}} = \eta_D, \mu_{D^{op^{coop}}} = \mu_D \circ t'_{D,D}, \varepsilon_{D^{op^{coop}}} = \varepsilon_D, \delta_{D^{op^{coop}}} = t_{D,D} \circ \delta_D$$

y operador Yang-Baxter débil asociado $t_{D^{op^{coop}},D^{op^{coop}}} = t_{D,D}$ *es una BTD.*

(iv) $D^{coop^{op}} = (D, \eta_{D^{coop^{op}}}, \mu_{D^{coop^{op}}}, \varepsilon_{D^{coop^{op}}}, \delta_{D^{coop^{op}}})$ *con*

$$\eta_{D^{coop^{op}}} = \eta_D, \mu_{D^{coop^{op}}} = \mu_D \circ t_{D,D}, \varepsilon_{D^{coop^{op}}} = \varepsilon_D, \delta_{D^{coop^{op}}} = t'_{D,D} \circ \delta_D$$

y operador Yang-Baxter débil asociado $t_{D^{coop^{op}},D^{coop^{op}}} = t_{D,D}$ *es una BTD.*

Si además existe un morfismo λ_D *inversible tal que* $(D, \eta_D, \mu_D, \varepsilon_D, \delta_D)$ *es un AHTD en* $\mathcal{C}$*, entonces todas las BTD anteriores tienen también estructura de AHTD para las cuales*

$$\lambda_{D^{op}} = \lambda_D^{-1}, \quad \lambda_{D^{coop}} = \lambda_D^{-1}, \quad \lambda_{D^{op^{coop}}} = \lambda_D, \quad \lambda_{D^{coop^{op}}} = \lambda_D.$$

Prueba:
Realizaremos la prueba del apartado (i), puesto que la del apartado (ii) es similar usando los mismos argumentos. Por otro lado, (iii) y (iv) son consecuencia de (i) y (ii).

Teniendo en cuenta la Observación 1.2.5, el morfismo $t_{D,D}$ es un operador Yang-Baxter débil si y solo si también lo es $t'_{D,D}$. Además, es suficiente con probar (b1)–(b7) ya que $\nabla_{D^{\rm op},D^{\rm op}} = \nabla_{D,D}$.

En primer lugar tenemos que (b1) es consecuencia de (a3-2) ya que:

$$\mu_{D^{\rm op}} \circ \nabla_{D^{\rm op},D^{\rm op}} = \mu_D \circ t'_{D,D} \circ \nabla_{D,D} = \mu_D \circ t'_{D,D} = \mu_{D^{\rm op}}.$$

La igualdad (b1-2) se sigue de la propiedad respectiva para D y de (a2-3) para $t'_{D,D}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{D^{\rm op},D^{\rm op}} \circ (\mu_{D^{\rm op}} \otimes D^{\rm op}) \\
&= \nabla_{D,D} \circ ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes D) \\
&= ((\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes \nabla_{D,D})) \circ (t'_{D,D} \otimes D) \\
&= ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes D) \circ (D \otimes \nabla_{D,D}) \\
&= (\mu_{D^{\rm op}} \otimes D^{\rm op}) \circ (D^{\rm op} \otimes \nabla_{D^{\rm op},D^{\rm op}}).
\end{aligned}$$

El apartado (b1-3) se sigue de los mismos argumentos.

Las propiedades contenidas en (b2) se siguen de forma inmediata ya que $\delta_{D^{\rm op}} = \delta_D$ y $\nabla_{D^{\rm op},D^{\rm op}} = \nabla_{D,D}$.

La igualdad (b3-1) se sigue de (1.21) y la ecuación de Yang-Baxter para $t'_{D,D}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
&t'_{D,D} \circ ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes D) \\
&= (D \otimes \mu_D) \circ (t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}) \circ (t'_{D,D} \otimes D) \\
&= (D \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}).
\end{aligned}$$

La igualdad (b3-2) se deduce análogamente empleando (1.22) en vez de (1.21), y para demostrar (b3-3) y (b3-4) se usan respectivamente (1.23) y (1.24).

La prueba de (b4) es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\delta_{D^{\mathrm{op}}} \circ \mu_{D^{\mathrm{op}}}\\
&= \delta_D \circ \mu_D \circ t'_{D,D}\\
&= (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D) \circ t'_{D,D}\\
&= (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes D \otimes D) \circ (t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D)\\
&= (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes (t_{D,D} \circ t'_{D,D}) \otimes D) \circ (t'_{D,D} \otimes t'_{D,D}) \circ (D \otimes t'_{D,D} \otimes D)\\
&\quad \circ (\delta_D \otimes \delta_D)\\
&= (\mu_{D^{\mathrm{op}}} \otimes \mu_{D^{\mathrm{op}}}) \circ (D^{\mathrm{op}} \otimes t_{D^{\mathrm{op}},D^{\mathrm{op}}} \otimes D^{\mathrm{op}}) \circ (\delta_{D^{\mathrm{op}}} \otimes \delta_{D^{\mathrm{op}}}),
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue de la definición de $\delta_{D^{\mathrm{op}}}$ y $\mu_{D^{\mathrm{op}}}$, la segunda de (b4) para D; la tercera y la cuarta son consecuencia de (b3-3) y la quinta de (a2).

Para demostrar (b5) probaremos en primer lugar que

$$\varepsilon_{D^{\mathrm{op}}} \circ \mu_{D^{\mathrm{op}}} \circ (\mu_{D^{\mathrm{op}}} \otimes D^{\mathrm{op}}) = ((\varepsilon_{D^{\mathrm{op}}} \circ \mu_{D^{\mathrm{op}}}) \otimes (\varepsilon_{D^{\mathrm{op}}} \circ \mu_{D^{\mathrm{op}}})) \circ (D^{\mathrm{op}} \otimes \delta_{D^{\mathrm{op}}} \otimes D^{\mathrm{op}}).$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{D^{\mathrm{op}}} \circ \mu_{D^{\mathrm{op}}} \circ (\mu_{D^{\mathrm{op}}} \otimes D^{\mathrm{op}})\\
&= \varepsilon_D \circ \mu_D \circ t'_{D,D} \circ ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes D)\\
&= \varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \mu_D) \circ (t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}) \circ (t'_{D,D} \otimes D)\\
&= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (D \otimes (t'_{D,D} \circ \delta_D) \otimes D) \circ (t'_{D,D} \otimes D)\\
&\quad \circ (D \otimes t'_{D,D}) \circ (t'_{D,D} \otimes D)\\
&= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (D \otimes t'_{D,D} \otimes D) \circ (t'_{D,D} \otimes D \otimes D)\\
&\quad \circ (D \otimes t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes D \otimes t'_{D,D}) \circ (D \otimes t'_{D,D} \otimes D) \circ (t'_{D,D} \otimes D \otimes D)\\
&\quad \circ (D \otimes \delta_D \otimes D)\\
&= (\varepsilon_D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes \mu_D \otimes D) \circ (D \otimes D \otimes t'_{D,D})\\
&\quad \circ (D \otimes t'_{D,D} \otimes D) \circ (t'_{D,D} \otimes t'_{D,D}) \circ (D \otimes \delta_D \otimes D)
\end{aligned}
$$

$$= \varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varepsilon_D \otimes D) \circ (\nabla_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D})$$

$$\circ (t'_{D,D} \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (D \otimes \delta_D \otimes D)$$

$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes \varepsilon_D) \circ (D \otimes \nabla_{D,D}) \circ (t'_{D,D} \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (D \otimes \delta_D \otimes D)$$

$$= ((\varepsilon_{D^{\rm op}} \circ \mu_{D^{\rm op}}) \otimes (\varepsilon_{D^{\rm op}} \circ \mu_{D^{\rm op}})) \circ (D^{\rm op} \otimes \delta_{D^{\rm op}} \otimes D^{\rm op}).$$

En estos cálculos, las igualdades primera y última son consecuencia de las definiciones de $\varepsilon_{D^{\rm op}}$ y $\mu_{D^{\rm op}}$, la segunda se sigue de (b3-1), la tercera de la segunda igualdad de (b5) para D y por cumplir $t'_{D,D}$ la ecuación de Yang-Baxter, la cuarta de (b3-3) y (b3-4). La quinta igualdad se sigue de la ecuación de Yang-Baxter y de (b3-1), la sexta de (b3-1) y (1.20), la séptima de (a2-2), (a2-2) y (1.20) para $t'_{D,D}$, y la octava de (b1-3), (b2) y de las propiedades de $t'_{D,D}$.

De forma análoga obtendríamos que

$$\varepsilon_{D^{\rm op}} \circ \mu_{D^{\rm op}} \circ (\mu_{D^{\rm op}} \otimes D^{\rm op}) = ((\varepsilon_{D^{\rm op}} \circ \mu_{D^{\rm op}}) \otimes (\varepsilon_{D^{\rm op}} \circ \mu_{D^{\rm op}})) \\ \circ (D^{\rm op} \otimes (t'_{D^{\rm op},D^{\rm op}} \circ \delta_{D^{\rm op}}) \otimes D^{\rm op})$$

y (b5) quedaría probada para $D^{\rm op}$.

En cuanto a (b6), su prueba se sigue tras utilizar argumentos similares a los de la prueba de (b5) pero intercambiando μ_D por δ_D.

Para demostrar la segunda parte del teorema hay que comprobar las igualdades contenidas en (b7). La prueba de (b7-1) está dada por:

$$\mu_{D^{\rm op}} \circ (D^{\rm op} \otimes \lambda_{D^{\rm op}}) \circ \delta_{D^{\rm op}}$$

$$= \mu_D \otimes t'_{D,D} \circ ((\lambda_D^{-1} \circ \lambda_D) \otimes \lambda_D^{-1}) \circ \delta_D$$

$$= \lambda_D^{-1} \circ \mu_D \circ (\lambda_D \otimes D) \circ \delta_D$$

$$= \lambda_D^{-1} \circ \Pi_D^R$$

$$= \overline{\Pi}_D^R$$

$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D))$$

$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D \circ \nabla_{D,D}) \otimes D) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D))$$

$$= ((\varepsilon_{D^{\mathrm{op}}} \circ \mu_{D^{\mathrm{op}}}) \otimes D^{\mathrm{op}}) \circ (D^{\mathrm{op}} \otimes t_{D^{\mathrm{op}},D^{\mathrm{op}}}) \circ ((\delta_{D^{\mathrm{op}}} \circ \eta_{D^{\mathrm{op}}}) \otimes D^{\mathrm{op}}),$$

donde las igualdades primera, quinta y última son consecuencia de las definiciones de $\mu_{D^{\mathrm{op}}}$, $\delta_{D^{\mathrm{op}}}$, $\lambda_{D^{\mathrm{op}}}$, $\overline{\Pi}_D^R$, $\eta_{D^{\mathrm{op}}}$, $\varepsilon_{D^{\mathrm{op}}}$ y $t_{D^{\mathrm{op}},D^{\mathrm{op}}}$, la segunda de (1.57), la tercera de (1.29). La cuarta igualdad se sigue de (1.34), la sexta de (b1-1) y la séptima de (1.28).

La prueba de (b7-2) es análoga a la de (b7-1) y finalmente (b7-3) también se cumple ya que:

$$\lambda_{D^{\mathrm{op}}} \wedge id_{D^{\mathrm{op}}} \wedge \lambda_{D^{\mathrm{op}}}$$

$$= \mu_{D^{\mathrm{op}}} \circ (\lambda_{D^{\mathrm{op}}} \otimes (\mu_{D^{\mathrm{op}}} \circ (D^{\mathrm{op}} \otimes \lambda_{D^{\mathrm{op}}}) \circ \delta_{D^{\mathrm{op}}})) \circ \delta_{D^{\mathrm{op}}}$$

$$= \mu_D \circ t'_{D,D} \circ (\lambda_D^{-1} \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D} \circ (D \otimes \lambda_D^{-1}) \circ \delta_D)) \circ \delta_D$$

$$= \mu_D \circ t'_{D,D} \circ (\lambda_D^{-1} \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D} \circ ((\lambda_D^{-1} \circ \lambda_D) \otimes \lambda_D^{-1}) \circ \delta_D)) \circ \delta_D$$

$$= \mu_D \circ t'_{D,D} \circ (\lambda_D^{-1} \otimes \lambda_D^{-1}) \circ (D \otimes (\mu_D \circ (\lambda_D \otimes D) \circ \delta_D)) \circ \delta_D$$

$$= \lambda_D^{-1} \circ \mu_D \circ (D \otimes \Pi_D^R) \circ \delta_D$$

$$= \lambda_D^{-1},$$

donde las igualdades primera y segunda se siguen de las definiciones de convolución de morfismos, $\mu_{D^{\mathrm{op}}}$, $\delta_{D^{\mathrm{op}}}$ y $\lambda_{D^{\mathrm{op}}}$; la cuarta y quinta de (1.57) y la sexta de (1.30). □

Capítulo 2

Operadores débiles

Como se puede comprobar en (1) de Ejemplos 1.2.6, dada un álgebra de Hopf débil H en una categoría monoidal simétrica es claro que la trenza de la categoría interviene de forma explícita en la definición de las categorías de módulos Yetter-Drinfeld. En el caso que nos planteamos no existe una trenza global y es por ello necesario construir un nuevo concepto que permita definir lo que se entiende por módulo de Yetter-Drinfeld en esta situación y estudiar sus propiedades.

Con este objetivo, en este capítulo se define la noción de operador débil y se estudian sus propiedades básicas.

2.1. Definición y propiedades

En esta primera sección se introduce el concepto de operador débil, esencial para definir la noción de módulo de Yetter-Drinfeld en un contexto monoidal general.

Definición 2.1.1. Sea D una BTD en $\mathcal{C}$ y M un objeto en $\mathcal{C}$. Un operador débil entre M y D (en lo sucesivo (M, D)-OD) se define como una cuádrupla (r_M, r'_M, s_M, s'_M) formada por cuatro morfismos en $\mathcal{C}$:

$$r_M : M \otimes D \to D \otimes M, \qquad r'_M : D \otimes M \to M \otimes D,$$
$$s_M : D \otimes M \to M \otimes D, \qquad s'_M : M \otimes D \to D \otimes M,$$

tales que

(e1) Se cumple:

(e1-1) $(D\otimes r_M)\circ(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D}) = (t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\circ(r_M\otimes D)$,

(e1-2) $(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)\circ(t_{D,D}\otimes M) = (M\otimes t_{D,D})\circ(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)$,

(e1-3) $(s_M\otimes D)\circ(D\otimes s_M)\circ(t_{D,D}\otimes M) = (M\otimes t_{D,D})\circ(s_M\otimes D)\circ(D\otimes s_M)$,

(e1-4) $(D\otimes s'_M)\circ(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D}) = (t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)\circ(s'_M\otimes D)$,

y las igualdades análogas sustituyendo $t_{D,D}$ por $t'_{D,D}$.

(e2) Se cumple:

(e2-1) $(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes s_M)\circ(t_{D,D}\otimes M) = (M\otimes t_{D,D})\circ(s_M\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)$,

(e2-2) $(s_M\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)\circ(t'_{D,D}\otimes M) = (M\otimes t'_{D,D})\circ(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes s_M)$,

(e2-3) $(D\otimes s'_M)\circ(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D}) = (t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\circ(s'_M\otimes D)$,

(e2-4) $(D\otimes r_M)\circ(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D}) = (t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)\circ(r_M\otimes D)$.

(e3) Si

$$\nabla_{r_M} := r'_M\circ r_M : M\otimes D \to M\otimes D, \quad \nabla_{r'_M} := r_M\circ r'_M : D\otimes M \to D\otimes M,$$

$$\nabla_{s_M} := s'_M\circ s_M : D\otimes M \to D\otimes M, \quad \nabla_{s'_M} := s_M\circ s'_M : M\otimes D \to M\otimes D,$$

se tiene que:

(e3-1) $\nabla_{r_M} = (((\varepsilon_D\otimes M)\circ r_M)\otimes D)\circ(M\otimes\delta_D) = (M\otimes\mu_D)\circ(((r'_M\circ(\eta_D\otimes M))\otimes D)$,

(e3-2) $\nabla_{r'_M} = (D\otimes((M\otimes\varepsilon_D)\circ r'_M))\circ(\delta_D\otimes M) = (\mu_D\otimes M)\circ(D\otimes(r_M\circ(M\otimes\eta_D)))$,

(e3-3) $\nabla_{s_M} = (D\otimes((M\otimes\varepsilon_D)\circ s_M))\circ(\delta_D\otimes M) = (\mu_D\otimes M)\circ(D\otimes(s'_M\circ(M\otimes\eta_D)))$,

(e3-4) $\nabla_{s'_M} = (((\varepsilon_D\otimes M)\circ s'_M)\otimes D)\circ(M\otimes\delta_D) = (M\otimes\mu_D)\circ(((s_M\circ(\eta_D\otimes M))\otimes D)$.

(e4) Se cumple:

(e4-1) $r_M \circ (M \otimes \mu_D) = (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D)$,

(e4-2) $r'_M \circ (\mu_D \otimes M) = (M \otimes \mu_D) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M)$,

(e4-3) $(D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) = (\delta_D \otimes M) \circ r_M$,

(e4-4) $(r'_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (\delta_D \otimes M) = (M \otimes \delta_D) \circ r'_M$,

(e4-5) $s_M \circ (\mu_D \otimes M) = (M \otimes \mu_D) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M)$,

(e4-6) $s'_M \circ (M \otimes \mu_D) = (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (s'_M \otimes D)$,

(e4-7) $(s_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M) = (M \otimes \delta_D) \circ s_M$,

(e4-8) $(D \otimes s'_M) \circ (s'_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) = (\delta_D \otimes M) \circ s'_M$.

Definición 2.1.2. Sea D es un AHTD y M un objeto de $\mathcal{C}$. Un (M, D)-OD se define como una cuádrupla (r_M, r'_M, s_M, s'_M) satisfaciendo las condiciones (e1), (e2), (e3), (e4) anteriores y además:

(e5) Se cumple:

(e5-1) $(M \otimes \lambda_D) \circ \nabla_{r_M} = \nabla_{r_M} \circ (M \otimes \lambda_D)$,

(e5-2) $(\lambda_D \otimes M) \circ \nabla_{r'_M} = \nabla_{r'_M} \circ (\lambda_D \otimes M)$,

(e5-3) $(\lambda_D \otimes M) \circ \nabla_{s_M} = \nabla_{s_M} \circ (\lambda_D \otimes M)$,

(e5-4) $(M \otimes \lambda_D) \circ \nabla_{s'_M} = \nabla_{s'_M} \circ (M \otimes \lambda_D)$.

Observación 2.1.3. Nótese que en las igualdades de la condición (e2) no es posible sustituir $t_{D,D}$ por $t'_{D,D}$ o $t'_{D,D}$ por $t_{D,D}$; las igualdades análogas resultantes no se cumplen en general.

Observación 2.1.4. Aplicando de forma directa las definiciones de los morfismos definidos en (e3), que en adelante llamaremos ∇-morfismos, y las condiciones requeridas en la Definición 2.1.1 se deduce que:

$$(D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \nabla_{D,D}) = (\nabla_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D), \quad (2.1)$$

$$(r'_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (\nabla_{D,D} \otimes M) = (M \otimes \nabla_{D,D}) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M), \quad (2.2)$$

$$(D \otimes r_M) \circ (s'_M \otimes D) \circ (M \otimes \nabla_{D,D}) = (\nabla_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (s'_M \otimes D), \quad (2.3)$$

$$(s_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (\nabla_{D,D} \otimes M) = (M \otimes \nabla_{D,D}) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M), \tag{2.4}$$

$$(M \otimes \varepsilon_D) \circ \nabla_{r_M} = (\varepsilon_D \otimes M) \circ r_M, \quad (\varepsilon_D \otimes M) \circ \nabla_{r'_M} = (M \otimes \varepsilon_D) \circ r'_M, \tag{2.5}$$

$$\nabla_{r_M} \circ (M \otimes \eta_D) = r'_M \circ (\eta_D \otimes M), \quad \nabla_{r'_M} \circ (\eta_D \otimes M) = r_M \circ (M \otimes \eta_D), \tag{2.6}$$

$$\nabla_{r_M} \circ (M \otimes \mu_D) = (M \otimes \mu_D) \circ (\nabla_{r_M} \otimes D), \tag{2.7}$$

$$\nabla_{r'_M} \circ (\mu_D \otimes M) = (\mu_D \otimes M) \circ (\nabla_{r'_M} \otimes D), \tag{2.8}$$

$$(\nabla_{r_M} \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) = (M \otimes \delta_D) \circ \nabla_{r_M}, \tag{2.9}$$

$$(D \otimes \nabla_{r'_M}) \circ (\delta_D \otimes M) = (\delta_D \otimes M) \circ \nabla_{r'_M}, \tag{2.10}$$

$$(D \otimes \nabla_{r_M}) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) = (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D), \tag{2.11}$$

$$(\nabla_{r'_M} \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (\delta_D \otimes M) = (D \otimes r'_M) \circ (\delta_D \otimes M). \tag{2.12}$$

Nótese además que la cuádrupla (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un (M, D)-OD si y sólo si (s'_M, s_M, r'_M, r_M) también lo es, puesto que el papel de los distintos morfismos y sus propiedades son simétricas dos a dos. Así pues tenemos que

$$(s_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\nabla_{D,D} \otimes M) = (M \otimes \nabla_{D,D}) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M), \tag{2.13}$$

$$(D \otimes s'_M) \circ (s'_M \otimes D) \circ (M \otimes \nabla_{D,D}) = (\nabla_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (s'_M \otimes D), \tag{2.14}$$

$$(D \otimes s'_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \nabla_{D,D}) = (\nabla_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (r_M \otimes D), \tag{2.15}$$

$$(r'_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\nabla_{D,D} \otimes M) = (M \otimes \nabla_{D,D}) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M), \tag{2.16}$$

$$(\varepsilon_D \otimes M) \circ \nabla_{s_M} = (M \otimes \varepsilon_D) \circ s_M, \quad (M \otimes \varepsilon_D) \circ \nabla_{s'_M} = (\varepsilon_D \otimes M) \circ s'_M, \tag{2.17}$$

$$\nabla_{s'_M} \circ (M \otimes \eta_D) = s_M \circ (\eta_D \otimes M), \quad \nabla_{s_M} \circ (\eta_D \otimes M) = s'_M \circ (M \otimes \eta_D), \tag{2.18}$$

$$\nabla_{s'_M} \circ (M \otimes \mu_D) = (M \otimes \mu_D) \circ (\nabla_{s'_M} \otimes D), \tag{2.19}$$

$$\nabla_{s_M} \circ (\mu_D \otimes M) = (\mu_D \otimes M) \circ (\nabla_{s_M} \otimes D), \tag{2.20}$$

$$(D \otimes \nabla_{s_M}) \circ (\delta_D \otimes M) = (\delta_D \otimes M) \circ \nabla_{s_M}, \tag{2.21}$$

$$(\nabla_{s'_M} \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) = (M \otimes \delta_D) \circ \nabla_{s'_M}, \tag{2.22}$$

$$(\nabla_{s_M} \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M) = (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M), \tag{2.23}$$

$$(D \otimes \nabla_{s'_M}) \circ (s'_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) = (s'_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D). \tag{2.24}$$

Proposición 2.1.5. *Sea D una BTD en $\mathcal{C}$ y sea M un objeto de $\mathcal{C}$ tal que (r_M, r'_M, s_M, s'_M) sea un (M,D)-OD. Entonces se cumple lo siguiente:*

(i) Los morfismos ∇_{r_M}, $\nabla_{r'_M}$, ∇_{s_M} y $\nabla_{s'_M}$ son idempotentes.

(ii) Se tiene que:

$$r_M = r_M \circ r'_M \circ r_M, \tag{2.25}$$

$$r'_M = r'_M \circ r_M \circ r'_M, \tag{2.26}$$

$$s_M = s_M \circ s'_M \circ s_M, \tag{2.27}$$

$$s'_M = s'_M \circ s_M \circ s'_M. \tag{2.28}$$

Prueba:
(i) Probaremos que el morfismo ∇_{r_M} es idempotente. La prueba de la misma propiedad para $\nabla_{r'_M}$, ∇_{s_M} y $\nabla_{s'_M}$ es análoga. En efecto, teniendo en cuenta la coasociatividad de la estructura de coálgebra y gracias a la condición (e4-3) de la definición de operador débil y las propiedades de ε_D se tiene:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{r_M} \circ \nabla_{r_M} \\
&= (((\varepsilon_D \otimes M) \circ r_M) \otimes D) \circ (((\varepsilon_D \otimes M) \circ r_M) \otimes \delta_D) \circ (M \otimes \delta_D) \\
&= (\varepsilon_D \otimes \varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes M \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) \\
&= \nabla_{r_M}.
\end{aligned}$$

Para demostrar (ii) es suficiente usar la caracterización adecuada de los ∇-morfismos expuesta en (e3) de la Definición 2.1.1, aplicar (e4-3) de la Definición 2.1.1 y la propiedad de la counidad. En efecto:

$$\begin{aligned}
&r_M \circ \nabla_{r_M} \\
&= (\varepsilon_D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) \\
&= (\varepsilon_D \otimes D \otimes D) \circ (\delta_D \otimes M) \circ r_M \\
&= r_M.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si usamos las propiedades análogas correspondientes a la estructura de álgebra, es decir, la condición (e4-1) de la Definición 2.1.1 y las propiedades de η_D obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\nabla_{r'_M} \circ r_M \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes \eta_D) \\
&= r_M \circ (D \otimes \mu_D) \circ (M \otimes D \otimes \eta_D) \\
&= r_M.
\end{aligned}$$

Las otras fórmulas del apartado (ii) se deducen siguiendo un procedimiento análogo. □

Proposición 2.1.6. *Sea D una BTD en $\mathcal{C}$, M un objeto de la categoría y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD. Entonces se tiene que:*

(i) $(D \otimes \nabla_{r_M}) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) = (r_M \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (\nabla_{r_M} \otimes D)$,

(ii) $(t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (\nabla_{r'_M} \otimes D) = (D \otimes \nabla_{r'_M}) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes r_M)$,

(iii) $(\nabla_{s_M} \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) = (D \otimes s_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \nabla_{s_M})$,

(iv) $(M \otimes t_{D,D}) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes \nabla_{s'_M}) = (\nabla_{s'_M} \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (s_M \otimes D)$.

Prueba:
(i) La igualdad puede demostrarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&(D \otimes \nabla_{r_M}) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \\
&= (D \otimes ((\varepsilon_D \otimes M) \circ r_M) \otimes D) \circ (r_M \otimes \delta_D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \\
&= (D \otimes ((\varepsilon_D \otimes M) \circ r_M) \otimes D) \circ (r_M \otimes D \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (M \otimes D \otimes t_{D,D}) \\
&\quad \circ (M \otimes \delta_D \otimes D) \\
&= (((D \otimes \varepsilon_D) \circ t_{D,D}) \otimes M \otimes D) \circ (D \otimes r_M \otimes D) \circ (r_M \otimes t_{D,D}) \circ (M \otimes \delta_D \otimes D) \\
&= (((\varepsilon_D \otimes D) \circ \nabla_{D,D}) \otimes M \otimes D) \circ (D \otimes r_M \otimes D) \circ (r_M \otimes t_{D,D}) \circ (M \otimes \delta_D \otimes D) \\
&= (\varepsilon_D \otimes r_M \otimes D) \circ (r_M \otimes D \otimes D) \circ (M \otimes \nabla_{D,D} \otimes D)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\circ(M\otimes D\otimes t_{D,D})\circ(M\otimes\delta_D\otimes D)\\
&=(\varepsilon_D\otimes r_M\otimes D)\circ(r_M\otimes t_{D,D})\circ(M\otimes\delta_D\otimes D)\\
&=(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})\circ(\nabla_{r_M}\otimes D),
\end{aligned}
$$

donde en las igualdades primera y última se usa la igualdad $\nabla_{r_M}=(((\varepsilon_D\otimes M)\circ r_M)\otimes D)\circ(M\otimes\delta_D)$, en la segunda (b3-3) de la Definición 1.2.9 y en la tercera (e1-1) de la Definición 2.1.1. La cuarta igualdad es consecuencia de (1.19) de la Definición 1.2.9, la quinta de (2.1) y la sexta de (a2-2) de la Definición 1.2.4 y (b2-1) de la Definición 1.2.9.

En cuanto a la igualdad incluida en (ii) la demostración es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\circ(\nabla_{r'_M}\otimes D)\\
&=(t_{D,D}\otimes M)\circ(\mu_D\otimes r_M)\circ(D\otimes r_M\otimes D)\circ(D\otimes M\otimes\eta_D\otimes D)\\
&=(((D\otimes\mu_D)\circ(t_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes t_{D,D}))\otimes D)\circ(D\otimes D\otimes r_M)\\
&\circ(D\otimes r_M\otimes D)\circ(D\otimes M\otimes\eta_D\otimes D)\\
&=(D\otimes\mu_D\otimes M)\circ(t_{D,D}\otimes r_M)\circ(D\otimes r_M\otimes D)\circ(D\otimes M\otimes(\nabla_{D,D}\circ(D\otimes\eta_D)))\\
&=(D\otimes\mu_D\otimes M)\circ(t_{D,D}\otimes D\otimes M)\circ(D\otimes\nabla_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes D\otimes r_M)\\
&\circ(D\otimes r_M\otimes\eta_D)\\
&=(D\otimes\mu_D\otimes M)\circ(t_{D,D}\otimes r_M)\circ(D\otimes r_M\otimes\eta_D)\\
&=(D\otimes\nabla_{r'_M})\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M),
\end{aligned}
$$

donde la primera y la última igualdad se siguen de (e3) de la Definición 2.1.1, la segunda de (b3-1) de la Definición 1.2.9, la tercera de (e1-1) de la Definición 2.1.1, la cuarta es consecuencia de (2.1) y la quinta de (a2-3) de la Definición 1.2.4 y (b1-1) de la Definición 1.2.9.

Las fórmulas en (iii) y (iv) se deducen por los mismos argumentos. □

Observación 2.1.7. Razonando de la misma forma que en la demostración de la Proposición 2.1.6 se obtiene también que:

$$
(D\otimes\nabla_{r_M})\circ(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})=(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})\circ(\nabla_{r_M}\otimes D), \quad (2.29)
$$

$$(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\circ(\nabla_{r'_M}\otimes D) = (D\otimes\nabla_{r'_M})\circ(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M), \quad (2.30)$$

$$(\nabla_{s_M}\otimes D)\circ(D\otimes s_M)\circ(t'_{D,D}\otimes M) = (D\otimes s_M)\circ(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes\nabla_{s_M}), \quad (2.31)$$

$$(M\otimes t'_{D,D})\circ(s_M\otimes D)\circ(D\otimes\nabla_{s'_M}) = (\nabla_{s'_M}\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})\circ(s_M\otimes D), \quad (2.32)$$

$$(D\otimes\nabla_{s'_M})\circ(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D}) = (s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})\circ(\nabla_{s'_M}\otimes D), \quad (2.33)$$

$$(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)\circ(\nabla_{s_M}\otimes D) = (D\otimes\nabla_{s_M})\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M), \quad (2.34)$$

$$(\nabla_{r'_M}\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)\circ(t_{D,D}\otimes M) = (D\otimes r'_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes\nabla_{r'_M}), \quad (2.35)$$

$$(M\otimes t_{D,D})\circ(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes\nabla_{r_M}) = (\nabla_{r_M}\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})\circ(r'_M\otimes D), \quad (2.36)$$

$$(D\otimes\nabla_{s'_M})\circ(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D}) = (s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})\circ(\nabla_{s'_M}\otimes D), \quad (2.37)$$

$$(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)\circ(\nabla_{s_M}\otimes D) = (D\otimes\nabla_{s_M})\circ(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M), \quad (2.38)$$

$$(\nabla_{r'_M}\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)\circ(t'_{D,D}\otimes M) = (D\otimes r'_M)\circ(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes\nabla_{r'_M}), \quad (2.39)$$

$$(M\otimes t'_{D,D})\circ(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes\nabla_{r_M}) = (\nabla_{r_M}\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})\circ(r'_M\otimes D). \quad (2.40)$$

Proposición 2.1.8. *Sea D una BTD en $\mathcal{C}$, M un objeto de la categoría y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M,D)-OD. Entonces se tiene que:*

(i) $(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\circ(\nabla_{s_M}\otimes D) = (D\otimes\nabla_{s_M})\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)$,

(ii) $(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})\circ(\nabla_{s'_M}\otimes D) = (D\otimes\nabla_{s'_M})\circ(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})$,

(iii) $(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})\circ(\nabla_{r_M}\otimes D) = (D\otimes\nabla_{r_M})\circ(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})$,

(iv) $(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)\circ(\nabla_{r'_M}\otimes D) = (D\otimes\nabla_{r'_M})\circ(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)$.

Prueba:
La demostración es análoga a la de la Proposición 2.1.6, pero usando (2.3) en vez de (2.1) y (e2) de la Definición 2.1.1 en vez de (e1) de la misma definición. □

Proposición 2.1.9. *Sea D una BTD en $\mathcal{C}$, M un objeto de la categoría y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M,D)-OD. Entonces se cumple:*

(i) $(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})\circ(r'_M\otimes D) = (D\otimes r'_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)$,

(ii) $(D\otimes s_M)\circ(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)=(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})\circ(s_M\otimes D)$,

(iii) $(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})\circ(r'_M\otimes D)=(D\otimes r'_M)\circ(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)$,

(iv) $(D\otimes s_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)=(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})\circ(s_M\otimes D)$.

Prueba:
Demostraremos (i). En efecto:

$$
\begin{aligned}
&(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})\circ(r'_M\otimes D)\\
&=(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})\circ((\nabla_{r_M}\circ r'_M)\otimes D)\\
&=(D\otimes(r'_M\circ r_M))\circ(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})\circ(r'_M\otimes D)\\
&=(D\otimes r'_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\circ(r_M\otimes D)\circ(r'_M\otimes D)\\
&=(D\otimes r'_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\circ(\nabla_{r'_M}\otimes D)\\
&=(D\otimes(r'_M\circ\nabla_{r'_M}))\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\\
&=(D\otimes r'_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M).
\end{aligned}
$$

En las igualdades anteriores, la primera y la última se siguen del apartado (ii) de la Proposición 2.1.5, la segunda y la quinta de la Proposición 2.1.6, la tercera de (e1-1) de la Definición 2.1.1 y la cuarta por la definición de $\nabla_{r'_M}$. □

Proposición 2.1.10. *Sea D una BTD en $\mathcal{C}$, M un objeto de la categoría y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M,D)-OD. Entonces se cumple:*

(i) $(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})\circ(s_M\otimes D)=(D\otimes s_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)$,

(ii) $(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})\circ(r'_M\otimes D)=(D\otimes r'_M)\circ(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)$.

Prueba:
La demostración es análoga a la de la Proposición 2.1.9; la diferencia estriba en el uso de la Proposición 2.1.8 en vez de la Proposición 2.1.6, y la condición (e2-3) de la Definición 2.1.1. □

Observación 2.1.11. En virtud de la Definición 2.1.1 se tiene que si $M = D$ es una BTD en $\mathcal{C}$, entonces el operador Yang-Baxter débil asociado $t_{D,D}$ constituye un ejemplo de (D,D)-OD con $r_M = s_M = t_{D,D}$ y $r'_M = s'_M = t'_{D,D}$; permaneciendo cierta tal afirmación para $t'_{D,D}$.

En el caso particular donde $(\mathcal{C}, \otimes, c)$ es una categoría monoidal trenzada, las cuádruplas $(c_{M,D}, c^{-1}_{M,D}, c_{D,M}, c^{-1}_{D,M})$ y $(c^{-1}_{D,M}, c_{D,M}, c^{-1}_{M,D}, c_{M,D})$ son ejemplos de (M,D)-OD para cualquier objeto M de $\mathcal{C}$.

Proposición 2.1.12. *Sea D una BTD en $\mathcal{C}$, M un objeto de la categoría y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M,D)-OD. Entonces:*

(i) $(r_M \otimes D) \circ (M \otimes (\delta_D \circ \eta_D)) = (D \otimes r'_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)$,

(ii) $((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) = (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (r'_M \otimes D)$,

(iii) $(s'_M \otimes D) \circ (M \otimes (\delta_D \circ \eta_D)) = (D \otimes s_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)$,

(iv) $((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) = (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (s_M \otimes D)$.

Prueba:
Demostraremos en primer lugar (i). En efecto:

$$
\begin{aligned}
&(D \otimes r'_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)\\
&= (D \otimes M \otimes ((\varepsilon_D \otimes D) \circ \delta_D)) \circ (D \otimes r'_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)\\
&= (D \otimes ((M \otimes \varepsilon_D) \circ r'_M) \otimes D) \circ (\delta_D \otimes M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)\\
&= ((r_M \circ r'_M) \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)\\
&= (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) \circ r'_M \circ (\eta_D \otimes M)\\
&= (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) \circ \nabla_{r_M} \circ (M \otimes \eta_D)\\
&= ((r_M \circ \nabla_{r_M}) \otimes D) \circ (M \otimes (\delta_D \circ \eta_D))\\
&= (r_M \otimes D) \circ (M \otimes (\delta_D \circ \eta_D)),
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se deduce por las propiedades de la counidad, la segunda por (b3-3) de la Definición 1.2.9 y la coasociatividad de δ_D, la tercera por la caracterización de $\nabla_{r'_M}$ expuesta en (e3-2) de la Definición 2.1.1. En la cuarta igualdad se usa (e4-4) de la Definición 2.1.1, en la quinta (2.6), en la sexta (2.9) y la octava es consecuencia de apartado (ii) de la Proposición 2.1.5.

La prueba de la parte (ii) se realiza siguiendo un procedimiento análogo pero aplicando las propiedades correspondientes a la estructura de álgebra en vez de las de coálgebra (véase la demostración del Lema 1.2.14).

Las igualdades referentes a s_M y s'_M se deducen por el mismo procedimiento. $\square$

Si D es un AHTD, el comportamiento de los operadores débiles da lugar a unas propiedades que recuerdan a las obtenidas para los operadores Yang-Baxter débiles (véase [5]). En concreto:

Proposición 2.1.13. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$, M un objeto en la categoría y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD. Se cumple:*

(i) $(M\otimes\Pi_D^L)\circ\nabla_{r_M} = \nabla_{r_M}\circ(M\otimes\Pi_D^L)$ *y* $(\Pi_D^L\otimes M)\circ\nabla_{r'_M} = \nabla_{r'_M}\circ(\Pi_D^L\otimes M)$,

(ii) $(M\otimes\Pi_D^R)\circ\nabla_{r_M} = \nabla_{r_M}\circ(M\otimes\Pi_D^R)$ *y* $(\Pi_D^R\otimes M)\circ\nabla_{r'_M} = \nabla_{r'_M}\circ(\Pi_D^R\otimes M)$,

(iii) $(M\otimes\overline{\Pi}_D^L)\circ\nabla_{r_M} = \nabla_{r_M}\circ(M\otimes\overline{\Pi}_D^L)$ *y* $(\overline{\Pi}_D^L\otimes M)\circ\nabla_{r'_M} = \nabla_{r'_M}\circ(\overline{\Pi}_D^L\otimes M)$,

(iv) $(M\otimes\overline{\Pi}_D^R)\circ\nabla_{r_M} = \nabla_{r_M}\circ(M\otimes\Pi_D^L)$ *y* $(\Pi_D^L\otimes M)\circ\nabla_{r'_M} = \nabla_{r'_M}\circ(\overline{\Pi}_D^R\otimes M)$.

Prueba:
En primer lugar aplicando la fórmula (1.29) y posteriormente las igualdades (2.7) y (2.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{r_M}\circ(M\otimes\Pi_D^L)\\
&=\nabla_{r_M}\circ(M\otimes(\mu_D\circ(D\otimes\lambda_D)\circ\delta_D))\\
&=(M\otimes\mu_D)\circ(\nabla_{r_M}\otimes\lambda_D)\circ(M\otimes\delta_D)\\
&=(M\otimes\Pi_D^L)\circ\nabla_{r_M}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, gracias a (1.29), la condición (e5) de la Definición 2.1.2 y las igualdades (2.8) y (2.10) resulta:

$$\nabla_{r'_M}\circ(\Pi_D^L\otimes M)$$

$$= \nabla_{r'_M} \circ ((\mu_D \circ (D \otimes \lambda_D) \circ \delta_D) \otimes M)$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes \nabla_{r'_M}) \circ (D \otimes \lambda_D \otimes M) \circ (\delta_D \otimes M)$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes \lambda_D \otimes M) \circ (D \otimes \nabla_{r'_M}) \circ (\delta_D \otimes M)$$

$$= (\Pi_D^L \otimes M) \circ \nabla_{r'_M}.$$

Análogamente se probaría:

$$\nabla_{r_M} \circ (M \otimes \Pi_D^R) = (M \otimes \Pi_D^R) \circ \nabla_{r_M} \text{ y } \nabla_{r'_M} \circ (\Pi_D^R \otimes M) = (\Pi_D^R \otimes M) \circ \nabla_{r'_M}.$$

Aplicando ahora (1.31) y (1.32) resulta:

$$\nabla_{r_M} \circ (M \otimes \overline{\Pi}_D^L) = (M \otimes \overline{\Pi}_D^L) \circ \nabla_{r_M}, \quad \nabla_{r_M} \circ (M \otimes \overline{\Pi}_D^L) = (M \otimes \overline{\Pi}_D^L) \circ \nabla_{r_M}.$$

Las otras igualdades se siguen de una forma análoga. □

Observación 2.1.14. Usando argumentos análogos a los de la Proposición 2.1.13 se obtiene también que:

(i) $(M\otimes\Pi_D^L)\circ\nabla_{s'_M} = \nabla_{s'_M}\circ(M\otimes\Pi_D^L)$ y $(\Pi_D^L\otimes M)\circ\nabla_{s_M} = \nabla_{s_M}\circ(\Pi_D^L\otimes M)$,

(ii) $(M\otimes\Pi_D^R)\circ\nabla_{s'_M} = \nabla_{s'_M}\circ(M\otimes\Pi_D^R)$ y $(\Pi_D^R\otimes M)\circ\nabla_{s_M} = \nabla_{s_M}\circ(\Pi_D^R\otimes M)$,

(iii) $(M\otimes\overline{\Pi}_D^L)\circ\nabla_{s'_M} = \nabla_{s'_M}\circ(M\otimes\overline{\Pi}_D^L)$ y $(\overline{\Pi}_D^L\otimes M)\circ\nabla_{s_M} = \nabla_{s_M}\circ(\overline{\Pi}_D^L\otimes M)$,

(iv) $(M\otimes\overline{\Pi}_D^R)\circ\nabla_{s'_M} = \nabla_{s'_M}\circ(M\otimes\Pi_D^L)$ y $(\Pi_D^L\otimes M)\circ\nabla_{s_M} = \nabla_{s_M}\circ(\overline{\Pi}_D^R\otimes M)$.

Proposición 2.1.15. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$, M un objeto en la categoría y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD. Se cumple:*

(i) $(\Pi_D^L \otimes M) \circ r_M = r_M \circ (M \otimes \Pi_D^L)$ *y* $r'_M \circ (\Pi_D^L \otimes M) = (M \otimes \Pi_D^L) \circ r'_M$,

(ii) $(\Pi_D^R \otimes M) \circ r_M = r_M \circ (M \otimes \Pi_D^R)$ *y* $r'_M \circ (\Pi_D^R \otimes M) = (M \otimes \Pi_D^R) \circ r'_M$,

(iii) $(\overline{\Pi}_D^L \otimes M) \circ r_M = r_M \circ (M \otimes \overline{\Pi}_D^L)$ *y* $r'_M \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes M) = (M \otimes \overline{\Pi}_D^L) \circ r'_M$,

(iv) $(\overline{\Pi}_D^R \otimes M) \circ r_M = r_M \circ (M \otimes \overline{\Pi}_D^R)$ *y* $r'_M \circ (\overline{\Pi}_D^R \otimes M) = (M \otimes \overline{\Pi}_D^R) \circ r'_M$.

Prueba:
Para demostrar esta proposición nótese primero que

$$
\begin{aligned}
&(M\otimes \Pi_D^L)\circ \nabla_{r_M}\\
&=(((\varepsilon_D\otimes M)\circ r_M)\otimes \Pi_D^L)\circ (M\otimes \delta_D)\\
&=(((\varepsilon_D\otimes M)\circ r_M)\otimes D)\circ (M\otimes \mu_D\otimes D)\circ (M\otimes D\otimes t_{D,D})\circ (M\otimes (\delta_D\circ \eta_D)\otimes D)\\
&=((\varepsilon_D\circ \mu_D)\otimes M\otimes D)\circ (D\otimes r_M\otimes D)\circ (r_M\otimes t_{D,D})\circ (M\otimes (\delta_D\circ \eta_D)\otimes D)\\
&=((\varepsilon_D\circ \mu_D)\otimes M\otimes D)\circ (D\otimes r_M\otimes D)\circ (D\otimes M\otimes t_{D,D})\circ (D\otimes r'_M\otimes D)\\
&\circ((\delta_D\circ \eta_D)\otimes M\otimes D)\\
&=((\varepsilon_D\circ \mu_D)\otimes r'_M)\circ (D\otimes t_{D,D}\otimes M)\circ ((\delta_D\circ \eta_D)\otimes r_M)\\
&=r'_M\circ (\Pi_D^L\otimes M)\circ r_M.
\end{aligned}
$$

En estos cálculos la primera igualdad se deduce de (e3) de la Definición 2.1.1, la segunda de (1.43) y la tercera de (e4) de la Definición 2.1.1. La cuarta igualdad es consecuencia del apartado (ii) de la Proposición 2.1.12 y la última de la definición de Π_D^L.

Se obtiene entonces que:

$$(M\otimes \Pi_D^L)\circ \nabla_{r_M}=r'_M\circ (\Pi_D^L\otimes M)\circ r_M=\nabla_{r_M}\circ (M\otimes \Pi_D^L). \tag{2.41}$$

Así pues gracias a (2.41) tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&(\Pi_D^L\otimes M)\circ r_M\\
&=(\Pi_D^L\otimes M)\circ \nabla_{r'_M}\circ r_M\\
&=\nabla_{r'_M}\circ (\Pi_D^L\otimes M)\circ r_M\\
&=r_M\circ r'_M\circ (\Pi_D^L\otimes M)\circ r_M\\
&=r_M\circ \nabla_{r_M}\circ (M\otimes \Pi_D^L)\\
&=r_M\circ (M\otimes \Pi_D^L).
\end{aligned}
$$

La prueba de la igualdad $r'_M \circ (\Pi_D^L \otimes M) = (M \otimes \Pi_D^L) \circ r'_M$ y las incluidas en el apartado (ii) siguen el mismo argumento. Una vez conocidos (i) y (ii), usando (1.31) y (1.32) se demuestran (iii) y (iv). □

Observación 2.1.16. Usando argumentos análogos a los de la Proposición 2.1.15 se obtiene también que:

(i) $(\Pi_D^L \otimes M) \circ s'_M = s'_M \circ (M \otimes \Pi_D^L)$ y $s_M \circ (\Pi_D^L \otimes M) = (M \otimes \Pi_D^L) \circ s_M$,

(ii) $(\Pi_D^R \otimes M) \circ s'_M = s'_M \circ (M \otimes \Pi_D^R)$ y $s_M \circ (\Pi_D^R \otimes M) = (M \otimes \Pi_D^R) \circ s_M$,

(iii) $(\overline{\Pi}_D^L \otimes M) \circ s'_M = s'_M \circ (M \otimes \overline{\Pi}_D^L)$ y $s_M \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes M) = (M \otimes \overline{\Pi}_D^L) \circ s_M$,

(iv) $(\overline{\Pi}_D^R \otimes M) \circ s'_M = s'_M \circ (M \otimes \overline{\Pi}_D^R)$ y $s_M \circ (\overline{\Pi}_D^R \otimes M) = (M \otimes \overline{\Pi}_D^R) \circ s_M$.

Proposición 2.1.17. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$, M un objeto en la categoría y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD. Se cumple:*

(i) $(\lambda_D \otimes M) \circ r_M = r_M \circ (M \otimes \lambda_D)$ *y* $(M \otimes \lambda_D) \circ r'_M = r'_M \circ (\lambda_D \otimes M)$,

(ii) $(M \otimes \lambda_D) \circ s_M = s_M \circ (\lambda_D \otimes M)$ *y* $(\lambda_D \otimes M) \circ s'_M = s'_M \circ (M \otimes \lambda_D)$.

Si además λ_D es un isomorfismo las igualdades anteriores también se cumplen al sustituir λ_D por λ_D^{-1}.

Prueba:
La prueba de la primera igualdad es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_D \otimes M) \circ r_M \\
&= ((\lambda_D \wedge \Pi_D^L) \otimes M) \circ r_M \\
&= ((\mu_D \circ (\lambda_D \otimes \Pi_D^L)) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (\lambda_D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes \Pi_D^L) \circ (M \otimes \delta_D) \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (\lambda_D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes \mu_D) \circ (M \otimes \delta_D \otimes \lambda_D) \circ (M \otimes \delta_D) \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (\mu_D \otimes r_M) \circ (\lambda_D \otimes r_M \otimes D) \circ (r_M \otimes D \otimes \lambda_D) \\
&\quad \circ (M \otimes \delta_D \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D)
\end{aligned}
$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (\Pi_D^R \otimes r_M) \circ (r_M \otimes \lambda_D) \circ (M \otimes \delta_D)$$

$$= r_M \circ (M \otimes (\Pi_D^R \wedge \lambda_D))$$

$$= r_M \circ (M \otimes \lambda_D).$$

En estos cálculos, las identidades primera y última son consecuencia de (1.29), la segunda de (e4-3) de la Definición 2.1.1 y la tercera de la Proposición 2.1.15. La cuarta igualdad se sigue de (e4-3) de la Definición 2.1.1 y la coasociatividad de δ_D, la quinta de (e4-1) de la Definición 2.1.1, la sexta de (e4-3) de la Definición 2.1.1 y (1.29). Finalmente en la séptima se hace uso de la Proposición 2.1.15 y de (e4-1) de la Definición 2.1.1.

De un modo similar se obtiene la igualdad para r'_M, s_M y s'_M.

Finalmente, componiendo con λ_D^{-1} en las expresiones anteriores se obtienen las igualdades análogas para λ_D^{-1}. □

Corolario 2.1.18. *Sea D una AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y M un objeto en $\mathcal{C}$. Si (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un (M, D)-OD, se cumplen las siguientes igualdades:*

(i)
$$\nabla_{r_M} = (M \otimes (\mu_D \circ t_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (\eta_D \otimes M \otimes D)$$
$$= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (\eta_D \otimes M \otimes D),$$

(ii)
$$\nabla_{r_M} = (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes (t_{D,D} \circ \delta_D))$$
$$= (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes (t'_{D,D} \circ \delta_D)),$$

(iii)
$$\nabla_{r'_M} = ((\mu_D \circ t_{D,D}) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (D \otimes M \otimes \eta_D)$$
$$= ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (D \otimes M \otimes \eta_D),$$

(iv)
$$\nabla_{r'_M} = (D \otimes M \otimes \varepsilon_D) \circ (D \otimes r'_M) \circ ((t_{D,D} \circ \delta_D) \otimes M)$$
$$= (D \otimes M \otimes \varepsilon_D) \circ (D \otimes r'{}_M) \circ ((t'_{D,D} \circ \delta_D) \otimes M),$$

(v)
$$\begin{aligned}\nabla_{s_M} &= ((\mu_D \circ t_{D,D}) \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (D \otimes M \otimes \eta_D)\\ &= ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (D \otimes M \otimes \eta_D),\end{aligned}$$

(vi)
$$\begin{aligned}\nabla_{s_M} &= (D \otimes M \otimes \varepsilon_D) \circ (D \otimes s_M) \circ ((t_{D,D} \circ \delta_D) \otimes M)\\ &= (D \otimes M \otimes \varepsilon_D) \circ (D \otimes s_M) \circ ((t'_{D,D} \circ \delta_D) \otimes M),\end{aligned}$$

(vii)
$$\begin{aligned}\nabla_{s'_M} &= (M \otimes (\mu_D \circ t_{D,D})) \circ (s_M \otimes D) \circ (\eta_D \otimes M \otimes D)\\ &= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (s_M \otimes D) \circ (\eta_D \otimes M \otimes D),\end{aligned}$$

(viii)
$$\begin{aligned}\nabla_{s'_M} &= (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (s'_M \otimes D) \circ (M \otimes (t_{D,D} \circ \delta_D))\\ &= (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (s'_M \otimes D) \circ (M \otimes (t'_{D,D} \circ \delta_D)).\end{aligned}$$

Prueba:
Probemos en primer lugar (i). Se tiene que:

$$\begin{aligned}&\nabla_{r_M}\\ &= (M \otimes \lambda_D) \circ \nabla_{r_M} \circ (M \otimes \lambda_D^{-1})\\ &= (M \otimes (\lambda_D \circ \mu_D)) \circ (r'_M \otimes \lambda_D^{-1}) \circ (\eta_D \otimes M \otimes D)\\ &= (M \otimes (\mu_D \circ t_{D,D})) \circ (M \otimes \lambda_D \otimes D) \circ (r'_M \otimes D) \circ (\eta_D \otimes M \otimes D)\\ &= (M \otimes (\mu_D \circ t_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (\eta_D \otimes M \otimes D),\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es consecuencia de (e5-1)de la Definición 2.1.1, la segunda de (e3) de la Definición 2.1.1, la tercera de (1.55) y la quinta de (1.56) y la Proposición 2.1.17.

Usando (1.57) y (1.58) en vez de (1.55) y (1.56) respectivamente se deduce:

$$\nabla_{r_M}$$

$$= (M \otimes \lambda_D^{-1}) \circ \nabla_{r_M} \circ (M \otimes \lambda_D)$$

$$= (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (r_M \otimes \lambda_D^{-1}) \circ (M \otimes (\delta_D \circ \lambda_D))$$

$$= (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \lambda_D \otimes D) \circ (M \otimes (t_{D,D} \circ \delta_D))$$

$$= (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes (t_{D,D} \circ \delta_D)).$$

Las restantes igualdades pueden demostrarse siguiendo el mismo esquema, componiendo con λ_D y λ_D^{-1} en el orden adecuado. □

A partir de este Corolario 2.1.18 se deduce que un operador débil para un AHTD con antípodo inversible proporciona automáticamente estructuras de operador débil para todas las diferentes estructuras de AHTD que surgen a partir de D modificando el producto y el coproducto mediante la composición con $t_{D,D}$ y $t'_{D,D}$. De forma precisa:

Proposición 2.1.19. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y M un objeto en $\mathcal{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) (r_M, r'_M, s_M, s'_M) *es un* (M, D)*-OD,*

(ii) (s'_M, s_M, r'_M, r_M) *es un* (M, D^{op})*-OD,*

(iii) (s'_M, s_M, r'_M, r_M) *es un* (M, D^{coop})*-OD,*

(iv) (r_M, r'_M, s_M, s'_M) *es un* $(M, D^{op^{coop}})$*-OD,*

(v) (r_M, r'_M, s_M, s'_M) *es un* $(M, D^{coop^{op}})$*-OD.*

Prueba:
Para demostrar la proposición basta con ver que los tres primeros apartados son equivalentes, ya que $D = D^{\mathrm{op}^{\mathrm{op}}} = D^{\mathrm{coop}^{\mathrm{coop}}}$.

A partir de (i) se deduce (ii). En efecto, la condición (e1) de la Definición 2.1.1 es evidente dado el papel simétrico desempeñado en ella por $t_{D,D}$ y $t'_{D,D}$. La condición (e2) de la Definición 2.1.1 se sigue del hecho de que $t_{D^{\mathrm{op}},D^{\mathrm{op}}} = t'_{D,D}$ y en el apartado (ii) r'_M y s_M juegan los papeles de s_M y r'_M respectivamente, al igual que r_M y s'_M con respecto a s'_M y r_M. El Corolario 2.1.18 permite afirmar en particular que dada D un AHTD con antípodo inversible, y un (M, D)-OD siendo M un objeto de $\mathcal{C}$, todos los ∇-morfismos son iguales para D^{op}, D^{coop} y D, de donde resulta (e3) de la Definición 2.1.1. La condición (e4) de la Definición 2.1.1 para el apartado (ii) es consecuencia directa de las condiciones (e4) y (e1) de la Definición 2.1.1 para D. Finalmente (e5) de la Definición 2.1.2 para (ii) resulta de componer las igualdades de (e5) para D con $\lambda_D^{-1}\otimes M$ y $M\otimes\lambda_D^{-1}$.

La prueba de que el primer apartado implica el tercero y viceversa se realiza usando los mismos argumentos. □

Se concluye esta sección mostrando que dado un operador débil, si la categoría $\mathcal{C}$ admite idempotentes escindidos, se generan de forma automática nuevos operadores débiles relacionados con la escisión de un morfismo idempotente.

Lema 2.1.20. *Sea D una BTD, M y N objetos en $\mathcal{C}$, (r_M, r'_M, s_M, s'_M) y (r_N, r'_N, s_N, s'_N) un (M,D)-OD y un (N,D)-OD respectivamente, y $f: M\to N$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Entonces:*

(i) $(D\otimes f)\circ r_M = r_N\circ(f\otimes D)$ *si y solo si* $(f\otimes D)\circ r'_M = r'_N\circ(D\otimes f)$,

(ii) $(f\otimes D)\circ s_M = s_N\circ(D\otimes f)$ *si y solo si* $(D\otimes f)\circ s'_M = s'_N\circ(f\otimes D)$.

Prueba:
Probemos en primer lugar el apartado (i). En efecto, suponiendo que se cumple que $(D\otimes f)\circ r_M = r_N\circ(f\otimes D)$, gracias a la caracterización de (e3-1) de la Definición 2.1.1 se concluye que:

$$\nabla_{r_N}\circ(f\otimes D) = (f\otimes D)\circ\nabla_{r_M}, \tag{2.42}$$

y por (e3-2) de la Definición 2.1.1 se obtiene que:

$$\nabla_{r'_N}\circ(D\otimes f) = (D\otimes f)\circ\nabla_{r'_M}. \tag{2.43}$$

Por lo tanto, combinando las igualdades precedentes con (e3) de la Definición 2.1.1 y la parte (ii) de la Proposición 2.1.5 resulta que $(f\otimes D)\circ r'_M = {r'}_N\circ(D\otimes f)$ ya que

$$\begin{aligned} &(f\otimes D)\circ r'_M \\ &= (f\otimes D)\circ\nabla_{r_M}\circ r'_M \end{aligned}$$

$$= \nabla_{r_N} \circ (f \otimes D) \circ r'_M$$

$$= r'_N \circ r_N \circ (f \otimes D) \circ r'_M$$

$$= r'_N \circ (D \otimes f) \circ \nabla_{r'_M}$$

$$= r'_N \circ \nabla_{r'N} \circ (D \otimes f)$$

$$= r'N \circ (D \otimes f).$$

Para demostrar la implicación en el otro sentido, suponiendo ahora que $(f \otimes D) \circ r'_M = r'_N \circ (D \otimes f)$, se deduce de (e3-2) de la Definición 2.1.1 que

$$\nabla_{r'_N} \circ (D \otimes f) = (D \otimes f) \circ \nabla_{r'_M} \tag{2.44}$$

y de (e3-1) de la Definición 2.1.1 que

$$\nabla_{r_N} \circ (f \otimes D) = (f \otimes D) \circ \nabla_{r_M}. \tag{2.45}$$

Entonces, aplicando además la parte (ii) de la Proposición 2.1.5 y la hipótesis $(f \otimes D) \circ r'_M = r'_N \circ (D \otimes f)$ se tiene que:

$$(D \otimes f) \circ r_M$$

$$= (D \otimes f) \circ \nabla_{r'_M} \circ r_M$$

$$= \nabla_{r'_N} \circ (D \otimes f) \circ r_M$$

$$= r_N \circ r'_N \circ (D \otimes f) \circ r_M$$

$$= r_N \circ (f \otimes D) \circ \nabla_{r_M}$$

$$= r_N \circ \nabla_{r_N} \circ (f \otimes D)$$

$$= r_N \circ (f \otimes D).$$

El apartado (ii) se sigue de forma análoga. □

Proposición 2.1.21. *Sean D una BTD o un AHTD en $\mathcal{C}$, M un objeto en $\mathcal{C}$, (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M,D)-OD y $f : M \to M$ un morfismo idempotente cumpliendo las igualdades*

$$(D \otimes f) \circ r_M = r_M \circ (f \otimes D) \tag{2.46}$$

y

$$(f \otimes D) \circ s_M = s_M \circ (D \otimes f). \tag{2.47}$$

Entonces, si N, $i : N \to M$ y $p : M \to N$ son respectivamente el objeto y los morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $i \circ p = f$ y $p \circ i = id_N$, se cumple que la cuádrupla (r_N, r'_N, s_N, s'_N) donde

$$r_N = (D \otimes p) \circ r_M \circ (i \otimes D), \qquad r'_N = (p \otimes D) \circ r'_M \circ (D \otimes i), \tag{2.48}$$

$$s_N = (p \otimes D) \circ s_M \circ (D \otimes i), \qquad s'_N = (D \otimes p) \circ s'_M \circ (i \otimes D), \tag{2.49}$$

es un (N,D)-OD.

Prueba:
La condición (e1-1) de la Definición 2.1.1 se cumple ya que:

$$\begin{aligned}
&(D \otimes r_N) \circ (r_N \otimes D) \circ (N \otimes t_{D,D})\\
&= (D \otimes D \otimes p) \circ (D \otimes r_M) \circ (D \otimes (i \circ p) \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (i \otimes t_{D,D})\\
&= (D \otimes D \otimes p) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (i \otimes t_{D,D})\\
&= (t_{D,D} \otimes p) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (i \otimes D \otimes D)\\
&= (t_{D,D} \otimes p) \circ (D \otimes r_M) \circ (D \otimes (i \circ p) \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (i \otimes D \otimes D)\\
&= (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes r_N) \circ (r_N \otimes D),
\end{aligned}$$

donde las igualdades primera y última se siguen de la definición de r_N, la segunda y la cuarta son consecuencia de (2.46), $i \circ p = f$ y $f \circ i = i$. Finalmente, la tercera se sigue de la condición (e1-1) de la Definición 2.1.1 para r_M.

El resto de las igualdades requeridas en (e1) de la Definición 2.1.1 se prueban similarmente, usando el Lema 2.1.20 cuando intervienen los morfismos r'_M, s'_M, r'_N o s'_N.

La prueba de (e2-1) de la Definición 2.1.1 es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
& (r'_N \otimes D) \circ (D \otimes s_N) \otimes (t_{D,D} \otimes N) \\
&= (p \otimes D \otimes D) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes (i \circ p) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (t_{D,D} \otimes i) \\
&= (p \otimes D \otimes D) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (t_{D,D} \otimes i) \\
&= (p \otimes t_{D,D}) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (D \otimes D \otimes i) \\
&= (p \otimes t_{D,D}) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes (i \circ p) \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (D \otimes D \otimes i) \\
&= (D \otimes t_{D,D}) \circ (s_N \otimes D) \circ (D \otimes r'_N).
\end{aligned}
$$

En estos cálculos, las igualdades primera y última se siguen de la definición de s_N, la segunda y la cuarta por (2.46), además de $i \circ p = f$ y $f \circ i = i$. Finalmente, la tercera es consecuencia de la condición (e2-1) de la Definición 2.1.1 para el (M, D)-OD. Las otras igualdades de (e2) pueden demostrase por el mismo procedimiento.

En lo que respecta a la condición (e3) de la Definición 2.1.1, la primera de las igualdades es cierta ya que:

$$
\begin{aligned}
& \nabla_{r_N} \\
&= r'_N \circ r_N \\
&= (p \otimes D) \circ r'_M \circ (D \otimes (i \circ p)) \circ r_M \circ (i \otimes D) \\
&= (p \otimes D) \circ \nabla_{r_M} \circ (i \otimes D) \\
&= (\varepsilon_D \otimes p \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (i \otimes \delta_D) \\
&= (\varepsilon_D \otimes N \otimes D) \circ (r_N \otimes D) \circ (N \otimes \delta_D),
\end{aligned}
$$

donde las igualdades primera, segunda y última se siguen por las definiciones de los morfismos ∇_{r_N}, r_N y r'_N, y la tercera por (2.46). La cuarta igualdad es consecuencia (e3-1) de la Definición 2.1.1 para ∇_{r_M}, y las restantes igualdades incluidas en (e3) se demuestran por argumentos análogos.

La condición (e4-1) de la Definición 2.1.1 para el (N, D)-OD es consecuencia de (e4-1) para el (M, D)-OD y de (2.46). En efecto:

$$
r_N \circ (N \otimes \mu_D)
$$

$$= (D \otimes p) \circ r_M \circ (i \otimes \mu_D)$$

$$= (\mu_D \otimes p) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (i \otimes D \otimes D)$$

$$= (\mu_D \otimes p) \circ (D \otimes r_M) \circ (D \otimes (i \circ p) \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (i \otimes D \otimes D)$$

$$= (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes r_N) \circ (r_N \otimes D).$$

La condición (e4-2) de la Definición 2.1.1 para el (N, D)-OD se deduce de forma análoga y para obtener (e4-3) y (e4-4) se pueden seguir argumentos similares aplicando también el Lema 2.1.20.

Finalmente, cuando D es una AHTD las igualdades contenidas en (e5) de la Definición 2.1.2 se siguen sin más que aplicar la condición (e5) referida al (M, D)-OD, porque en este caso se tiene que $\nabla_{r_N} = (p \otimes D) \circ \nabla_{r_M} \circ (i \otimes D)$, $\nabla_{r'_N} = (D \otimes p) \circ \nabla_{r'_M} \circ (D \otimes i)$, $\nabla_{s_N} = (D \otimes p) \circ \nabla_{s_M} \circ (D \otimes i)$ y $\nabla_{s'_N} = (p \otimes D) \circ \nabla_{s'_M} \circ (i \otimes D)$, tal y como se puso de manifiesto durante la prueba de la condición (e3). □

2.2. Operadores débiles y estructuras de (co)módulo

En la sección anterior fue introducida la noción de operador débil relacionando una BTD o una AHTD con un objeto cualquiera M en una categoría monoidal $\mathcal{C}$. Para definir el concepto y estudiar sus propiedades fundamentales no es necesario establecer ninguna restricción sobre el objeto M; pero cuando éste está dotado de una estructura algebraica adicional de D-módulo o D-comódulo, la noción de (M, D)-OD resulta enriquecida por ella, obteniéndose un comportamiento coherente con la estructura adicional de M. Cabe resaltar también que la presencia de un (M, D)-operador débil compatible con una determinada estructura de módulo o comódulo permite generar de forma sistemática nuevas estructuras de módulo y comódulo preservando la compatibilidad.

Comenzamos demostrando el siguiente lema:

Lema 2.2.1. *Sea D una BTD en $\mathcal{C}$, M un objeto en $\mathcal{C}$ y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD. Se cumple:*

(i) *Si* (M, φ_M) *es un* D*-módulo por la izquierda entonces* $\varphi_M = \varphi_M \circ \nabla_{r'_M}$ *si y solo si* $\varphi_M \circ r_M \circ (M \otimes \eta_D) = id_M$.

(ii) *Si* (M, ψ_M) *es un* D*-módulo por la derecha entonces* $\psi_M = \psi_M \circ \nabla_{r_M}$ *si y solo si* $\psi_M \circ r'_M \circ (\eta_D \otimes M) = id_M$.

(iii) *Si* (M, ϱ_M) *es un* D*-comódulo por la izquierda entonces* $\varrho_M = \nabla_{r'_M} \circ \varrho_M$ *si y solo si* $(M \otimes \varepsilon_D) \circ r'_M \circ \varrho_M = id_M$.

(iv) *Si* (M, ρ_M) *es un* D*-comódulo por la derecha entonces* $\rho_M = \nabla_{r_M} \circ \rho_M$ *si y solo si* $(\varepsilon_D \otimes M) \circ r_M \circ \rho_M = id_M$.

Prueba:
En lo tocante a la prueba de (i), para demostrar la implicación directa, en virtud de la hipótesis, (e3-1) de la Definición 2.1.1 y la condición de módulo se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_M \\
&= \varphi_M \circ (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ (M \otimes \eta_D))) \\
&= \varphi_M \circ (D \otimes (\varphi_M \circ r_M \circ (M \otimes \eta_D))).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, componiendo con $\eta_D \otimes M$ se sigue la igualdad buscada.

Por otro lado, si $\varphi_M \circ r_M \circ (M \otimes \eta_D) = id_M$, entonces la condición de módulo y (e3-2) de la Definición 2.1.1 permiten afirmar:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_M \circ \nabla_{r'_M} \\
&= \varphi_M \circ (D \otimes (\varphi_M \circ r_M \circ (M \otimes \eta_D))) \\
&= \varphi_M
\end{aligned}
$$

obteniéndose la implicación opuesta. Las demostraciones de los restantes apartados del lema son similares; basta con escoger entre las igualdades contenidas en (e3) de la Definición 2.1.1 la más conveniente en cada caso. □

Observación 2.2.2. En las condiciones del Lema 2.2.1 y usando argumentos similares se obtiene que:

(i) Si (M, φ_M) es un D-módulo por la izquierda entonces $\varphi_M = \varphi_M \circ \nabla_{s_M}$ si y solo si $\varphi_M \circ s'_M \circ (M \otimes \eta_D) = id_M$.

(ii) Si (M, ψ_M) es un D-módulo por la derecha entonces $\psi_M = \psi_M \circ \nabla_{s'_M}$ si y solo si $\psi_M \circ s_M \circ (\eta_D \otimes M) = id_M$.

(iii) Si (M, ϱ_M) es un D-comódulo por la izquierda entonces $\varrho_M = \nabla_{s_M} \circ \varrho_M$ si y solo si $(M \otimes \varepsilon_D) \circ s_M \circ \varrho_M = id_M$.

(iv) Si (M, ρ_M) es un D-comódulo por la derecha entonces $\rho_M = \nabla_{s'_M} \circ \rho_M$ si y solo si $(\varepsilon_D \otimes M) \circ s'_M \circ \rho_M = id_M$.

Se introduce a continuación la noción de (M, D)-OD compatible con la estructura de (co)módulo:

Definición 2.2.3. Sea D una BTD en $\mathcal{C}$, M un objeto en $\mathcal{C}$, (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD y (M, φ_M) un D-módulo por la izquierda. Se dirá que el (M, D)-OD es compatible con la estructura de D-módulo si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $r_M \circ (\varphi_M \otimes D) = (D \otimes \varphi_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes r_M)$,

(ii) $r'_M \circ (D \otimes \varphi_M) = (\varphi_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (t'_{D,D} \otimes M)$,

(iii) $s_M \circ (D \otimes \varphi_M) = (\varphi_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (t_{D,D} \otimes M)$,

(iv) $s'_M \circ (\varphi_M \otimes D) = (D \otimes \varphi_M) \circ (t'_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes s'_M)$.

Definición 2.2.4. Sea D una BTD en $\mathcal{C}$, M un objeto en $\mathcal{C}$, (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD y (M, ϱ_M) un D-comódulo por la izquierda. Se dirá que el (M, D)-OD es compatible con la estructura de D-comódulo si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $(D \otimes \varrho_M) \circ r_M = (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (\varrho_M \otimes D)$,

(ii) $(\varrho_M \otimes D) \circ r'_M = (D \otimes r'_M) \circ (t'_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M)$,

(iii) $(\varrho_M \otimes D) \circ s_M = (D \otimes s_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M)$,

(iv) $(D \otimes \varrho_M) \circ s'_M = (t'_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (\varrho_M \otimes D)$.

Definición 2.2.5. Sea D una BTD en $\mathcal{C}$, M un objeto en $\mathcal{C}$, (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD y (M, ψ_M) un D-módulo por la derecha. Se dirá que el (M, D)-OD es compatible con la estructura de D-módulo si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $r_M \circ (\psi_M \otimes D) = (D \otimes \psi_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D})$,

(ii) $r'_M \circ (D \otimes \psi_M) = (\psi_M \otimes D) \circ (M \otimes t'_{D,D}) \circ (r'_M \otimes D)$,

(iii) $s_M \circ (D \otimes \psi_M) = (\psi_M \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (s_M \otimes D)$,

(iv) $s'_M \circ (\psi_M \otimes D) = (D \otimes \psi_M) \circ (s'_M \otimes D) \circ (M \otimes t'_{D,D})$.

Definición 2.2.6. Sea D una BTD en $\mathcal{C}$, M un objeto en $\mathcal{C}$, (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD y (M, ρ_M) un D-comódulo por la derecha. Se dirá que el (M, D)-OD es compatible con la estructura de D-comódulo si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $(D \otimes \rho_M) \circ r_M = (r_M \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (\rho_M \otimes D)$,

(ii) $(\rho_M \otimes D) \circ r'_M = (M \otimes t'_{D,D}) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes \rho_M)$,

(iii) $(\rho_M \otimes D) \circ s_M = (M \otimes t_{D,D}) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes \rho_M)$,

(iv) $(D \otimes \rho_M) \circ s'_M = (s'_M \otimes D) \circ (M \otimes t'_{D,D}) \circ (\rho_M \otimes D)$.

Observación 2.2.7. Nótese que en el caso particular donde $\mathcal{C}$ es una categoría trenzada con trenza c y se toma la cuádrupla $(c_{M,D}, c^{-1}_{M,D}, c_{D,M}, c^{-1}_{D,M})$ formada a partir de la propia trenza de la categoría como el (M, D)-OD, entonces las condiciones de la definición anterior se trivializan, por lo que en el contexto clásico la compatibilidad es automática y no constituye ninguna restricción.

Las siguientes proposiciones clarifican cómo los operadores débiles compatibles permiten generar nuevas estructuras de (co)módulo a partir de una dada conservando la propiedad de compatibilidad cuando el objeto D está dotado de una estructura de AHTD con antípodo inversible.

Proposición 2.2.8. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible, (M, φ_M) un D-módulo por la izquierda y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD compatible con la estructura de módulo. Si se cumple que*

$$\varphi_M \circ r_M \circ (M \otimes \eta_D) = id_M,$$

entonces el par $(M, \psi_M^\lambda := \varphi_M \circ r_M \circ (M \otimes \lambda_D))$ es un D-módulo por la derecha y un D^{coop}-módulo por la derecha, de tal modo que (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un (M, D)-OD compatible con la estructura de D-módulo y (s'_M, s_M, r'_M, r_M) es un (M, D^{coop})-OD compatible con la estructura de D^{coop}-módulo.

Además el par $(M, \psi_M := \varphi_M \circ r_M)$ es un $D^{coop^{op}}$-módulo por la derecha y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un $(M, D^{coop^{op}})$-OD compatible con la estructura de $D^{coop^{op}}$-módulo.

Prueba:
Teniendo en cuenta (1.56) y la hipótesis es obvio que $\psi_M^\lambda \circ (M \otimes \eta_D) = id_M$. Se cumple también que:

$$\begin{aligned}
&\psi_M^\lambda \circ (\psi_M^\lambda \otimes D) \\
&= \varphi_M \circ r_M \circ (\varphi_M \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \lambda_D \otimes \lambda_D) \\
&= \varphi_M \circ (D \otimes \varphi_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \lambda_D \otimes \lambda_D) \\
&= \varphi_M \circ r_M \circ (M \otimes (\mu_D \circ t_{D,D} \circ (\lambda_D \otimes \lambda_D)) \\
&= \varphi_M \circ r_M \circ (M \otimes (\lambda_D \circ \mu_D)) \\
&= \psi_M^\lambda \circ (M \otimes \mu_D),
\end{aligned}$$

donde las igualdades primera y última se siguen por la definición de ψ_M^λ, la segunda es cierta por la compatibilidad del operador débil con la estructura de D-módulo por la izquierda, la tercera por la condición de módulo, la cuarta por (e1-1) y (e4-1) de la Definición 2.1.1. Finalmente, la quinta es consecuencia de (1.55).

Por lo tanto, (M, ψ_M^λ) es un D-módulo por la derecha y por lo tanto también un $D^{\rm coop}$-módulo por la derecha. Siguiendo el mismo argumento pero sin usar

(1.55) se concluye que $(M, \psi_M = \varphi_M \circ r_M)$ es un $D^{\mathrm{coop}^{\mathrm{op}}}$-módulo por la derecha y un $D^{\mathrm{coop}^{\mathrm{op}}}$-módulo por la derecha.

La compatibilidad de (r_M, r'_M, s_M, s'_M) con la estructura de D-módulo por la derecha se cumple ya que:

$$
\begin{aligned}
& r_M \circ (\psi_M^{\lambda} \otimes D) \\
&= (D \otimes \varphi_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \lambda_D \otimes D) \\
&= (D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (M \otimes \lambda_D \otimes D) \\
&= (D \otimes (\varphi_M \circ r_M)) \circ (r_M \otimes \lambda_D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \\
&= (D \otimes \psi_M^{\lambda}) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}),
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue por la definición de ψ_M^{λ} y la condición de compatibilidad, la segunda por (e1-1) de la Definición 2.1.1 y la tercera por (1.54).

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
& r'_M \circ (D \otimes \psi_M^{\lambda}) \\
&= (\varphi_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (t'_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (D \otimes M \otimes \lambda_D) \\
&= ((\varphi_M \circ r_M) \otimes D) \circ (M \otimes t'_{D,D}) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes M \otimes \lambda_D) \\
&= (\psi_M^{\lambda} \otimes D) \circ (M \otimes t'_{D,D}) \circ (r'_M \otimes D),
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue por la definición de ψ_M^{λ} y la condición de compatibilidad, la segunda por la Proposición 2.1.9 y la tercera por (1.53).

Además:

$$
\begin{aligned}
& s_M \circ (D \otimes \psi_M^{\lambda}) \\
&= (\varphi_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (D \otimes M \otimes \lambda_D) \\
&= ((\varphi_M \circ r_M) \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes M \otimes \lambda_D) \\
&= (\psi_M^{\lambda} \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (s_M \otimes D),
\end{aligned}
$$

donde en la primera igualdad se aplica la definición de ψ_M^{λ} y la compatibilidad, en la segunda se usa la Proposición 2.1.10 y la tercera se sigue por (1.53).

También se cumple que:

$$
\begin{aligned}
& s'_M \circ (\psi_M^{\lambda} \otimes D) \\
&= (D \otimes \varphi_M) \circ (t'_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \lambda_D \otimes D) \\
&= (D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes r_M) \circ (s'_M \otimes D) \circ (M \otimes t'_{D,D}) \circ (M \otimes \lambda_D \otimes D) \\
&= (D \otimes \psi_M^{\lambda}) \circ (s'_M \otimes D) \circ (M \otimes t'_{D,D}),
\end{aligned}
$$

empleándose (e2-4) de la Definición 2.1.1 en la segunda igualdad.

Nótese que en las líneas precedentes resulta también demostrada la compatibilidad con la estructura de D^{coop}-módulo, pues $t_{D^{\mathrm{coop}},D^{\mathrm{coop}}} = t'_{D,D}$.

La compatibilidad con la estructura de $D^{\mathrm{coop}^{\mathrm{op}}}$-módulo se demuestra análogamente. □

Proposición 2.2.9. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible, (M, φ_M) un D-módulo por la izquierda y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD compatible con la estructura de módulo. Si se cumple que*

$$\varphi_M \circ s'_M \circ (M \otimes \eta_D) = id_M,$$

entonces el par $(M, \psi_M^{\lambda^{-1}} := \varphi_M \circ s'_M \circ (M \otimes \lambda_D^{-1}))$ es un D-módulo por la derecha y un D^{coop}-módulo por la derecha, de tal modo que (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un (M, D)-OD compatible con la estructura de D-módulo por la derecha y (s'_M, s_M, r'_M, r_M) es un (M, D^{coop})-OD compatible con la estructura de D^{coop}-módulo.

Además el par $(M, \psi'_M := \varphi_M \circ s'_M)$ es un D^{op}-módulo por la derecha y un $D^{op^{coop}}$-módulo por la derecha de tal modo que (s'_M, s_M, r'_M, r_M) es un (M, D^{op})-OD compatible con la estructura de D^{op}-módulo, y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un $(M, D^{op^{coop}})$-OD compatible con la estructura de $D^{op^{coop}}$-módulo.

Prueba:

Esta demostración se realiza usando argumentos análogos a los de la prueba de la Proposición 2.2.8, teniendo en cuenta en este caso (1.57) y (1.58). □

De forma similar se obtienen los dos resultados siguientes.

Proposición 2.2.10. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible, (M, ψ_M) un D-módulo por la derecha y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD compatible con la estructura de módulo. Si se cumple que*

$$\psi_M \circ s_M \circ (\eta_D \otimes M) = id_M,$$

entonces el par $(M, \varphi_M^{\lambda} := \psi_M \circ s_M \circ (\lambda_D \otimes M))$ es un D-módulo por la izquierda y un D^{coop}-módulo por la izquierda, de tal modo que (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un (M, D)-OD compatible con la estructura de D-módulo por la izquierda y (s'_M, s_M, r'_M, r_M) es un (M, D^{coop})-OD compatible con la estructura de D^{coop}-módulo.

Además el par $(M, \varphi_M := \psi_M \circ s_M)$ es un $D^{coop^{op}}$-módulo por la izquierda de tal modo que (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un $(M, D^{coop^{op}})$-OD compatible con la estructura de $D^{coop^{op}}$-módulo.

Proposición 2.2.11. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible, (M, ψ_M) un D-módulo por la derecha y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD compatible con la estructura de módulo. Si se cumple que*

$$\psi_M \circ r'_M \circ (\eta_D \otimes M) = id_M,$$

entonces el par $(M, \varphi_M^{\lambda^{-1}} := \psi_M \circ r'_M \circ (\lambda_D^{-1} \otimes M))$ es un D-módulo por la izquierda y un D^{coop}-módulo por la izquierda, de tal modo que (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un (M, D)-OD compatible con la estructura de D-módulo por la izquierda y (s'_M, s_M, r'_M, r_M) (M, D^{coop})-OD compatible con la estructura de D^{coop}-módulo.

Además el par $(M, \varphi'_M := \psi_M \circ r'_M)$ es un D^{op}-módulo por la izquierda y un $D^{op^{coop}}$-módulo por la izquierda de tal modo que (s'_M, s_M, r'_M, r_M) es un (M, D^{op})-OD compatible con la estructura de D^{op}-módulo y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un $(M, D^{op^{coop}})$-OD compatible con la estructura de $D^{op^{coop}}$-módulo.

Observación 2.2.12. En la prueba del Lema 1.2.14 se indica cómo probar igualdades intercambiando los papeles de las propiedades de álgebra y coálgebra. Ejemplos del uso de tal procedimiento se encuentran, por ejemplo, en las pruebas de la parte (ii) de la Proposición 2.1.5 o la Proposición 2.1.12. Puede aplicarse un proceso análogo al tratar con las estructuras de módulo y comódulo. Las cuatro siguientes proposiciones constituyen el primer ejemplo en este sentido.

Proposición 2.2.13. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible, (M, ϱ_M) un D-comódulo por la izquierda y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD compatible con la estructura de comódulo. Si se cumple que*

$$(M \otimes \varepsilon_D) \circ s_M \circ \varrho_M = id_M,$$

entonces el par $(M, \rho^{\lambda}_M := (M \otimes \lambda_D) \circ s_M \circ \varrho_M)$ es un D-comódulo por la derecha y un D^{op}-comódulo por la derecha de tal modo que (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un (M, D)-OD compatible con la estructura de D-comódulo por la derecha y (s'_M, s_M, r'_M, r_M) es un (M, D^{op})-OD compatible con la estructura de D^{op}-comódulo.

Además el par $(M, \rho_M := s_M \circ \varrho_M)$ es un $D^{op^{coop}}$-comódulo por la derecha y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un $(M, D^{op^{coop}})$-OD compatible con la estructura de $D^{op^{coop}}$-comódulo.

Prueba:
Usando (1.56) se deduce que $(M \otimes \varepsilon_D) \circ \rho^{\lambda}_M = id_M$. Nótese que este razonamiento es análogo al seguido para demostrar que $\phi^{\lambda}_M \circ (M \otimes \eta_D) = id_M$ en la Proposición 2.2.8, usando ahora las propiedades de la counidad en vez de las de la unidad. Se cumple también que:

$$\begin{aligned}
&(\rho^{\lambda}_M \otimes D) \circ \rho^{\lambda}_M \\
&= (M \otimes \lambda_D \otimes \lambda_D) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M) \circ \varrho_M \\
&= (M \otimes \lambda_D \otimes \lambda_D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M) \circ \varrho_M \\
&= (M \otimes \lambda_D \otimes \lambda_D) \circ (M \otimes (t_{D,D} \circ \delta_D)) \circ s_M \circ \varrho_M \\
&= (M \otimes (\delta_D \circ \lambda_D)) \circ s_M \circ \varrho_M \\
&= (M \otimes \delta_D) \circ \rho^{\lambda}_M,
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la definición de ρ^{λ}_M y la compatibilidad del operador débil con la estructura de D-comódulo por la izquierda; la segunda de (e1-3) de la Definición 2.1.1 y la condición de D-comódulo, la tercera de (e4-7) de la Definición 2.1.1 y la cuarta de (1.55). Finalmente, la quinta igualdad se deduce por la definición de ρ^{λ}_M.

Resulta entonces que (M, ρ_M^{λ}) es un D-comódulo por la derecha. Nótese que los argumentos son análogos a los usados en la prueba de la Proposición 2.2.8 para probar que (M, ϕ_M^{λ}) es un D-módulo por la derecha; ahora se aplica la anticomultiplicatividad del antípodo en vez de su antimultiplicatividad, y la compatibilidad del (M, D)-OD con la estructura de D-comódulo en vez de la compatibilidad con la de D-módulo. Puesto que $\delta_{D^{\rm op}} = \delta_D$ y $\varepsilon_{D^{\rm op}} = \varepsilon_D$ queda también demostrado el resultado para $D^{\rm op}$.

Siguiendo argumentos similares se prueba que (M, ρ_M) es un $D^{{\rm op}^{\rm coop}}$-comódulo por la derecha.

La compatibilidad de las estructuras de D-comódulo por la derecha con el (M, D)-OD se demuestra igual que la compatibilidad con la estructura de D-módulo por la derecha en la Proposición 2.2.8, con la única salvedad de que en esta ocasión se aplica la compatibilidad con la estructura de D-comódulo (M, ϱ_M) en vez de la compatibilidad con la estructura de D-módulo (M, φ_M). Análogamente se demuestra la compatibilidad con el $(M, D^{\rm op})$-OD y el $(M, D^{{\rm op}^{\rm coop}})$-OD. □

Proposición 2.2.14. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible, (M, ϱ_M) un D-comódulo por la izquierda y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD compatible con la estructura de comódulo. Si se cumple que*

$$(M \otimes \varepsilon_D) \circ r'_M \circ \varrho_M = id_M,$$

entonces el par $(M, \rho_M^{\lambda^{-1}} := (M \otimes \lambda_D^{-1}) \circ r'_M \circ \varrho_M$ es un D-comódulo por la derecha y un D^{op}-comódulo por la derecha de tal modo que (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un (M, D)-OD compatible con la estructura de D-comódulo por la derecha y (s'_M, s_M, r'_M, r_M) es un (M, D^{op})-OD compatible con la estructura de D^{op}-comódulo.

Además el par $(M, \rho'_M := r'_M \circ \varrho_M)$ es un D^{coop}-comódulo por la derecha y un $D^{{coop}^{op}}$-comódulo por la derecha de tal modo que (r_M, r'_M, s_M, s'_M) es un $(M, D^{{coop}^{op}})$-OD compatible con la estructura de $D^{{coop}^{op}}$-comódulo y (s'_M, s_M, r'_M, r_M) es un (M, D^{coop})-OD compatible con la estructura de D^{coop}-comódulo.

Proposición 2.2.15. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible, (M, ϱ_M) un D-comódulo por la derecha y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD compatible* *con la estructura de comódulo. Si se cumple que*

$$(\varepsilon_D \otimes M) \circ r_M \circ \varrho_M = id_M,$$

entonces el par $(M, \rho_M^{\lambda} := (\lambda_D \otimes M) \circ r_M \circ \varrho_M)$ *es un* D*-comódulo por la izquierda y un* D^{op}*-comódulo por la izquierda de tal modo que* (r_M, r'_M, s_M, s'_M) *es un* (M, D)*-OD compatible con la estructura de* D*-comódulo por la izquierda y* (s'_M, s_M, r'_M, r_M) *es un* (M, D)*-OD compatible con la estructura de* D^{op}*-comódulo.*

Además el par $(M, \rho_M := r_M \circ \varrho_M)$ *es un* $D^{op^{coop}}$*-comódulo por la izquierda y es* (r_M, r'_M, s_M, s'_M) *es un* $(M, D^{op^{coop}})$*-OD compatible con la estructura de* $D^{op\,coop}$*-comódulo.*

Proposición 2.2.16. *Sea* D *un AHTD en* $\mathcal{C}$ *con antípodo inversible,* (M, ϱ_M) *un* D*-comódulo por la derecha y* (r_M, r'_M, s_M, s'_M) *un* (M, D)*-OD compatible con la estructura de comódulo. Si se cumple que*

$$(\varepsilon_D \otimes M) \circ s'_M \circ \varrho_M = id_M,$$

entonces el par $(M, \rho_M^{\lambda^{-1}} := (\lambda_D^{-1} \otimes M) \circ s'_M \circ \varrho_M$ *es un* D*-comódulo por la izquierda y un* D^{op}*-comódulo por la izquierda de tal modo que* (r_M, r'_M, s_M, s'_M) *es un* (M, D)*-OD compatible con la estructura de* D*-comódulo por la izquierda y* (s'_M, s_M, r'_M, r_M) *es un* (M, D^{op})*-OD compatible con la estructura de* D^{op}*-comódulo.*

Además el par $(M, \rho'_M := s'_M \circ \varrho_M)$ *es un* D^{coop}*-comódulo por la izquierda y un* $D^{coop^{op}}$*-comódulo por la izquierda de modo que* (r_M, r'_M, s_M, s'_M) *es un* $(M, D^{coop^{op}})$*-OD compatible con la estructura de* $D^{coop^{op}}$*-comódulo y* (s'_M, s_M, r'_M, r_M) *es un* (M, D^{coop})*-OD compatible con la estructura de* D^{coop}*-comódulo.*

Capítulo 3

Monoidalidad de la categoría de módulos Yetter-Drinfeld

En la primera sección de este capítulo se establece la definición de la categoría ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$ de módulos Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre un álgebra de Hopf trenzada débil D en una categoría monoidal estricta general $\mathcal{C}$ donde todo idempotente rompe. A continuación se exponen caracterizaciones alternativas y unas primeras propiedades fundamentales. También se observa cómo al restringir la nueva teoría al caso de álgebras de Hopf en una categoría simétrica se recupera la teoría clásica desarrollada en [81], así como su generalización al caso de álgebras de Hopf débiles dada en [22], [74] (ver además [34] y [9]). La segunda sección está dedicada a probar el carácter monoidal no estricto de la categoría ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$. Finalmente, en la tercera sección, usando la (co)acción adjunta, se presentan ejemplos de módulos Yetter-Drinfeld construidos a partir de un álgebra de Hopf trenzada débil arbitraria.

3.1. La categoría de los módulos Yetter-Drinfeld

En esta sección se define la categoría de los módulos Yetter-Drinfeld sobre una AHTD D arbitraria. Se dará una definición adecuada de módulo Yetter-Drinfeld de modo que se recupere la noción clásica en el caso particular de módulos sobre un álgebra de Hopf en una categoría simétrica, tal y como aparece por ejemplo en [81], y también la generalización de esta al caso de álgebras de Hopf débiles introducidas en [22].

Definición 3.1.1. Sea D un AHTD. Se dice que $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ es un módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre D si (M, φ_M) es un D-módulo por la izquierda, (M, ϱ_M) es un D-comódulo por la izquierda y se cumplen las siguientes condiciones:

(yd1-ii) $\varrho_M = (\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M) \circ (\eta_D \otimes M)$.

(yd2-ii) Existe un (M, D)-OD (r_M, r'_M, s_M, s'_M) compatible con las estructuras de (co)módulo de M tal que:

$$(\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M)$$
$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M).$$

La clase de todos los módulos Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre D será denotada por ${}^D_D\mathcal{YD}$.

Observación 3.1.2. Nótese que cuando la categoría $\mathcal{C}$ es simétrica y se definen tanto el operador Yang-Baxter débil como el operador débil a partir de la trenza de la categoría, se recuperan las definiciones introducidas en [81], [22]y [74].

Es más, asumiendo que $\mathcal{C}$ es trenzada y $t_{D,D} = c_{D,D}$, $t'_{D,D} = c^{-1}_{D,D}$; si (M, φ_M) es un D-módulo por la izquierda y (M, ϱ_M) es un D-comódulo por la izquierda, $(c_{M,D}, c^{-1}_{M,D}, c_{D,M}, c^{-1}_{D,M})$ es un (M, D)-OD compatible con las estructuras de (co)módulo de M. Por lo tanto, en esa situación un módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre D no es más que un D-módulo por la izquierda (M, φ_M) y un D-comódulo por la izquierda (M, ϱ_M) cumpliendo:

(1) $\varrho_M = (\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes c_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M) \circ (\eta_D \otimes M)$,

(2) $$(\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes c_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M)$$
$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes c_{M,D}) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D) \circ (D \otimes c_{D,M}) \circ (\delta_D \otimes M).$$

Nótese también que en [22] y [74] se exige el carácter finitamente generado de M como D-módulo y D-comódulo.

Definición 3.1.3. Sean $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ y $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ dos módulos Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre un álgebra de Hopf trenzada débil D en $\mathcal{C}$ con operadores débiles asociados

$$(r_M, r'_M, s_M, s'_M) \text{ y } (r_N, r'_N, s_N, s'_N)$$

respectivamente. Se dice que el morfismo $f : M \to N$ es un morfismo de módulos Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda si:

(i) f es un morfismo de (co)módulos por la izquierda,

(ii) $r_N \circ (f \otimes D) = (D \otimes f) \circ r_M, \qquad s_N \circ (D \otimes f) = (f \otimes D) \circ s_M.$

Observación 3.1.4. En virtud del Lema 2.1.20, si $f : M \to N$ es un morfismo de módulos de Yetter-Drinfeld entonces también se cumple que:

$$r'_N \circ (D \otimes f) = (f \otimes D) \circ r'_M \text{ y } s'_N \circ (f \otimes D) = (D \otimes f) \circ s'_M.$$

Obsérvese que para todo $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre D, $id_M : M \to M$ es un morfismo de módulos Yetter-Drinfeld.

Definición 3.1.5. Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. La categoría de los módulos Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre D es aquella cuya clase de objetos es la clase ${}^D_D\mathcal{YD}$ y cuyos morfismos entre objetos son las aplicaciones satisfaciendo las condiciones de la Definición 3.1.3.

Esta categoría será denotada también por ${}^D_D\mathcal{YD}$.

Proposición 3.1.6. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$, (M, φ_M) un D-módulo por la izquierda y (M, ϱ_M) un D-comódulo por la izquierda. Suponiendo la existencia de un (M, D)-OD (r_M, r'_M, s_M, s'_M) compatible con las estructuras de (co)módulo de M, las igualdades (yd1-ii) y (yd2-ii) son equivalentes a:*

(yd3-ii) $$\varrho_M \circ \varphi_M = (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M).$$

Prueba:
La implicación directa se cumple ya que cuando tenemos (yd1-ii) y (yd2-ii) se obtiene (yd3-ii). En efecto:

$$
\begin{aligned}
&(\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \\
&\circ(\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M) \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (\mu_D \otimes r_M) \circ (D \otimes r_M \otimes D) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D \otimes D) \circ (D \otimes s_M \otimes \lambda_D) \\
&\circ(\delta_D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M) \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes \Pi_D^L) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M) \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D) \circ (\mu_D \otimes s_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \\
&\circ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D \otimes M) \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \varphi_M) \\
&= (\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M) \circ (\eta_D \otimes \varphi_M) \\
&= \varrho_M \circ \varphi_M.
\end{aligned}
$$

En los cálculos precedentes las igualdades primera y quinta se siguen por (yd2-ii), la segunda por la asociatividad de μ_D y la coasociatividad de δ_D, (e4) de la Definición 2.1.1 y (1.29); la tercera por la Proposición 2.1.13 y (1.43). En la cuarta igualdad se aplica la compatibilidad del (M, D)-OD con la estructura de D-módulo y en la última (yd1-ii).

En el otro sentido, suponiendo (yd3-ii) se puede deducir (yd1-ii) como sigue:

$$
\begin{aligned}
&\varrho_M \\
&= \varrho_M \circ \varphi_M \circ (\eta_D \otimes M) \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \\
&\circ(\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes s_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes D \otimes \varrho_M)) \otimes D) \\
&\circ(\delta_D \otimes s_M) \circ (D \otimes \Pi_D^R \otimes M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= ((\mu_D \circ (D \otimes (\overline{\Pi}_D{}^L \circ \lambda_D))) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \\
&\circ(\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (D\otimes(\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes M)\circ(\delta_D\otimes\lambda_D\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\\
&\quad\circ(((\mu_D\otimes\varphi_M)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M)\circ(\delta_D\otimes\varrho_M))\otimes D)\circ(D\otimes s_M)\\
&\quad\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes M)\\
&= (D\otimes(\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes M)\circ(\mu_D\otimes\mu_D\otimes D\otimes M)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes D\otimes r_M)\\
&\quad\circ(\delta_D\otimes\delta_D\otimes\varphi_M\otimes D)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M\otimes D)\circ(D\otimes D\otimes\varrho_M\otimes\lambda_D)\\
&\quad\circ(D\otimes D\otimes s_M)\circ(D\otimes\delta_D\otimes M)\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes M)\\
&= (D\otimes(\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes M)\circ(D\otimes D\otimes r_M)\circ(\mu_D\otimes\mu_D\otimes\varphi_M\otimes D)\\
&\quad\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes t_{D,D}\otimes M\otimes D)\circ(\delta_D\otimes t_{D,D}\otimes\varrho_M\otimes\lambda_D)\circ(D\otimes D\otimes D\otimes s_M)\\
&\quad\circ(D\otimes D\otimes t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes\delta_D\otimes\varrho_M)\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes M)\\
&= (D\otimes(\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes M)\circ(D\otimes D\otimes r_M)\circ(D\otimes\mu_D\otimes\varphi_M\otimes\lambda_D)\\
&\quad\circ(D\otimes D\otimes t_{D,D}\otimes M\otimes D)\circ(D\otimes\delta_D\otimes\varrho_M\otimes D)\circ(D\otimes D\otimes s_M)\\
&\quad\circ(\mu_D\otimes\delta_D\otimes M)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M)\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes\varrho_M)\\
&= (D\otimes((\varepsilon_D\otimes M)\circ\varrho_M))\circ(\mu_D\otimes\varphi_M)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M)\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes\varrho_M)\\
&= (\mu_D\otimes\varphi_M)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M)\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes\varrho_M).
\end{aligned}
$$

En estos cálculos, la primera igualdad se sigue de la condición de módulo, la segunda de la condición (yd3-ii). La tercera igualdad se deduce de (1.46) y (1.34), la cuarta de (1.34). La quinta es consecuencia de (1.41), y la sexta de la coasociatividad de δ_D, (b4) de la Definición 1.2.9 y la Proposición 2.1.17. La séptima igualdad se sigue de (b3-3) de la Definición 1.2.9, la condición de comódulo y la compatibilidad del operador débil con la estructura de comódulo. Para deducir la octava se aplica la coasociatividad de δ_D y dos veces (b3) de la Definición 1.2.9. La novena igualdad es consecuencia directa de la condición (yd3-ii) y en la última se usa la condición de comódulo.

Finalmente (yd2-ii) se cumple ya que:

$$(\mu_D\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\circ((\varrho_M\circ\varphi_M)\otimes D)\circ(D\otimes s_M)\circ(\delta_D\otimes M)$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (\mu_D \otimes r_M) \circ (D \otimes r_M \otimes D) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$
$$\circ (\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D \otimes D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$
$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$
$$\circ (\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \Pi_D^R) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$
$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$
$$\circ (\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\mu_D \otimes \lambda_D \otimes M) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)$$
$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (\mu_D \otimes \varphi_M \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M \otimes D)$$
$$\circ (\mu_D \otimes \mu_D \otimes \varrho_M \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes \delta_D \otimes \lambda_D \otimes M)$$
$$\circ (D \otimes (\delta_D \otimes \eta_D) \otimes M)$$
$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (\mu_D \otimes \varphi_M \otimes D) \circ (\mu_D \otimes t_{D,D} \otimes \varphi_M \otimes D)$$
$$\circ (D \otimes t_{D,D} \otimes t_{D,D} \otimes M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D \otimes \varrho_M \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes D \otimes s_M)$$
$$\circ (D \otimes (\delta_D \otimes \eta_D) \otimes M)$$
$$= (\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes ((\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M)$$
$$\circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)))$$
$$\circ (D \otimes \eta_D \otimes M)$$
$$= (\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M) \circ (D \otimes (\varphi_M \circ (\eta_D \otimes M)))$$
$$= (\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M).$$

En los cálculos precedentes, las igualdades primera y séptima son consecuencia directa de la condición (yd3-ii), la segunda se sigue de la (co)asociatividad de $(\delta_D)\mu_D$, (e4) de la Definición 2.1.1 y (1.29). La tercera igualdad es consecuencia de la Proposición 2.1.15 junto con (1.34) y (1.46), mientras que la cuarta se sigue de (b4) de la Definición 1.2.9. En la quinta igualdad se aplica (b3) de la Definición 1.2.9, la condición de D-módulo y la Proposición 2.1.17; la sexta igualdad se deduce de la asociatividad de μ_D, (b3-1) de la Definición 1.2.9 y la compatibilidad del operador débil con la estructura de módulo. Finalmente la octava resulta de la condición de módulo. □

Esta caracterización alternativa permite probar el siguiente resultado sobre módulos Yetter-Drinfeld. Nótese que en el caso donde $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal simétrica y el (M, D)-OD está definido a partir de la trenza de la categoría se obtiene como caso particular el Lema 1.10 de [4].

Lema 3.1.7. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Si $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ es un objeto en ${}_D^D\mathcal{YD}$ entonces cumple las siguientes propiedades:*

(i) $\varrho_M \circ \varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes M) = (\mu_D \otimes D) \circ (\Pi_D^L \otimes \varrho_M)$,

(ii) $(\Pi_D^L \otimes M) \circ \varrho_M \circ \varphi_M = (\Pi_D^L \otimes \varphi_M) \circ (\delta_D \otimes M)$,

(iii) $\varrho_M \circ \varphi_M \circ (\Pi_D^R \otimes M)$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes (\lambda_D \circ \Pi_D^R) \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ s_M)) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M),$$

(iv) $(\Pi_D^R \otimes M) \circ \varrho_M \circ \varphi_M$

$$= (D \otimes \varphi_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ s_M)) \circ (D \otimes (\Pi_D^R \circ \lambda_D) \otimes M) \circ (\delta_D \otimes M).$$

Prueba:
Se probarán los apartados (i) y (iii), pues los restantes se obtienen empleando el mismo esquema general pero intercambiando entre si los roles de las propiedades de álgebra y coálgebra por un lado y módulo y comódulo por otro.

El apartado (i) se demuestra como sigue:

$$\begin{aligned}
&\varrho_M \circ \varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes M) \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \\
&\quad \circ (\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M) \circ (\Pi_D^L \otimes M) \\
&= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (\mu_D \otimes \varphi_M \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M \otimes D) \\
&\quad \circ (\mu_D \otimes D \otimes \varrho_M \otimes D) \circ (D \otimes D \otimes D \otimes s_M) \circ (D \otimes D \otimes \delta_D \otimes M) \\
&\quad \circ (\Pi_D^L \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)
\end{aligned}$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (\Pi_D^L \otimes (\varrho_M \circ \varphi_M)) \circ (D \otimes \eta_D \otimes M)$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (\Pi_D^L \otimes \varrho_M).$$

En los cálculos precedentes, las igualdades primera y tercera se siguen de la condición (yd3-ii); la segunda es consecuencia del apartado (i) del Lema 1.2.14. Finalmente, la cuarta igualdad se sigue de la condición de módulo.

La prueba del apartado (iii) es la siguiente:

$$\varrho_M \circ \varphi_M \circ (\Pi_D^R \otimes M)$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$

$$\circ (\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes s_M) \circ ((\delta_D \circ \Pi_D^R) \otimes M)$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$

$$\circ (\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes s_M) \circ (D \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \Pi_D^R \otimes M)$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$

$$\circ (\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (D \otimes (\mu_D \circ \nabla_{D,D}) \otimes M)$$

$$\circ (D \otimes \lambda_D \otimes \lambda_D \otimes M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \Pi_D^R \otimes M)$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (\mu_D \otimes r_M) \circ (D \otimes r_M \otimes D) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$

$$\circ (\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D \otimes D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes s_M) \circ ((\lambda_D \circ \Pi_D^R) \otimes M)$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes M) \circ (\eta_D \otimes s_M) \circ ((\lambda_D \circ \Pi_D^R) \otimes M)$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (D \otimes s_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ ((\lambda_D \circ \Pi_D^R) \otimes \varrho_M)$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ ((D \otimes (\lambda_D \circ \Pi_D^R)) \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ s_M)) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M).$$

En los cálculos anteriores, las igualdades primera y quinta son consecuencia de la condición (yd3-ii), mientras que la segunda lo es del apartado (iii) del Lema 1.2.14. La tercera igualdad se sigue de la Proposición 2.1.17, (1.55) y (1.2); la cuarta de (e4) de la Definición 2.1.1 y la Proposición 2.1.17. La sexta igualdad es consecuencia de la compatibilidad del (M, D)-OD con la estructura de módulo; la última de las Proposiciones 2.1.17 y 2.1.15. □

Observación 3.1.8. En las condiciones del Lema 3.1.7, componiendo con $\varepsilon_D \otimes M$ o con $\eta_D \otimes M$ resulta:

(i) $\varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes M) = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (\Pi_D^L \otimes \varrho_M)$,

(ii) $(\Pi_D^L \otimes M) \circ \varrho_M = (\Pi_D^L \otimes \varphi_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)$,

(iii)
$$\begin{aligned}\varphi_M \circ (\Pi_D^R \otimes M) = {} & ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes (((\lambda_D \circ \Pi_D^R) \otimes M) \\ & \circ (r_M \circ s_M)) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M),\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}(\Pi_D^R \otimes M) \circ \varrho_M = {} & (D \otimes \varphi_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ s_M \\ & \circ ((\Pi_D^R \circ \lambda_D) \otimes M))) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M).\end{aligned}$$

También a partir del Lema 3.1.7, aplicando la Proposición 2.1.17 y las igualdades que aparecen en (1.33) y (1.34) junto con (1.49) y (1.47) se obtiene:

(v)
$$\begin{aligned}\varphi_M \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes M) = {} & ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ s_M)) \\ & \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M),\end{aligned}$$

(vi) $(\overline{\Pi}_D^L \otimes M) \circ \varrho_M = (D \otimes \varphi_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)$,

(vii) $\varphi_M \circ (\overline{\Pi}_D^R \otimes M) = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M)$,

(viii)
$$\begin{aligned}(\overline{\Pi}_D^R \otimes M) \circ \varrho_M = {} & (D \otimes \varphi_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ s_M)) \\ & \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M).\end{aligned}$$

Se detalla la prueba de (v), siendo las otras similares:

$$\begin{aligned}& \varphi_M \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes M) \\ & = (\varepsilon_D \otimes M) \circ \varrho_M \circ \varphi_M \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes M) \\ & = (\varepsilon_D \otimes M) \circ \varrho_M \circ \varphi_M \circ ((\Pi_D^R \circ \overline{\Pi}_D^L) \otimes M) \\ & = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes (\lambda_D \circ \Pi_D^R) \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ s_M)) \circ (t_{D,D} \otimes M) \\ & \quad \circ (D \otimes \varrho_M) \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes M) \\ & = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes (\lambda_D \circ \overline{\Pi}_D^L) \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ s_M))\end{aligned}$$

$$\circ(t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M)$$

$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes \Pi_D^L \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ s_M)) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M)$$

$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ s_M)) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M).$$

En estos cálculos, la primera igualdad se deduce de la condición de comódulo, la segunda de (1.32), la tercera es consecuencia del apartado (iii) del Lema 3.1.7, la cuarta de la Proposición 2.1.15 y (1.37), en la quinta se aplica (1.34) y en la sexta (1.49).

Las estructuras de (co)módulo de los objetos de la categoría ${}_D^D\mathcal{YD}$ manifiestan un comportamiento especialmente adecuado con respecto a los ∇-morfismos. En efecto:

Proposición 3.1.9. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y el triple $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ un objeto en ${}_D^D\mathcal{YD}$ con (M, D)-OD asociado (r_M, r'_M, s_M, s'_M). Entonces:*

(i) $\varphi_M = \varphi_M \circ \nabla_{s_M}$ *si y solo si* $\varrho_M = \nabla_{s_M} \circ \varrho_M$,

(ii) $\varphi_M = \varphi_M \circ \nabla_{r'_M}$ *si solo si* $\varrho_M = \nabla_{r'_M} \circ \varrho_M$.

Prueba:
Se demuestra el apartado (i), siendo la prueba de (ii) análoga. En cuanto a la implicación directa:

$$(M \otimes \varepsilon_D) \circ s_M \circ \varrho_M$$

$$= (M \otimes \varepsilon_D) \circ s_M \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes M) \circ \varrho_M$$

$$= (M \otimes \varepsilon_D) \circ s_M \circ (D \otimes \varphi_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)$$

$$= (\varphi_M \otimes \varepsilon_D) \circ (D \otimes s_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)$$

$$= \varphi_M \circ \nabla_{s_M} \circ (\eta_D \otimes M)$$

$$= id_M,$$

donde la primera igualdad es consecuencia de $\varepsilon_D \circ \overline{\Pi}_D^R = \varepsilon_D$ y de la Proposición 2.1.15, la segunda de (vi) de la Observación 3.1.8, la tercera de la compatibilidad del operador débil y la cuarta se sigue por el Corolario 2.1.18 y la condición de módulo.

Ahora, aplicando el apartado (iii) de la Observación 2.2.2 resulta la igualdad $\varrho_M = \nabla_{s_M} \circ \varrho_M$.

Para demostrar la implicación en el otro sentido:

$$\begin{aligned}
&\varphi_M \circ s'_M \circ (M \otimes \eta_D) \\
&= \varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes M) \circ s'_M \circ (M \otimes \eta_D) \\
&= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (\Pi_D^L \otimes \varrho_M) \circ s'_M \circ (M \otimes \eta_D) \\
&= ((\varepsilon_D \circ \mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (\varrho_M \otimes \eta_D) \\
&= (\varepsilon_D \otimes M) \circ \nabla_{s_M} \circ \varrho_M \\
&= id_M,
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue de $\Pi_D^L \circ \eta_D = \eta_D$ y de la Proposición 2.1.15, la segunda de (i) de la Observación 3.1.8, la tercera es consecuencia de la compatibilidad del operador débil con la estructura de comódulo, la cuarta del Corolario 2.1.18 y la quinta de la hipótesis y de la condición de comódulo.

Entonces, usando (i) de la Observación 2.2.2 se tiene que $\varphi_M = \varphi_M \circ \nabla_{s_M}$.
□

Proposición 3.1.10. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y sea $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ un objeto de ${}_D^D\mathcal{YD}$. Se cumple que*

$$\varphi_M \circ \nabla_{s_M} = \varphi_M \circ \nabla_{r'_M} = \varphi_M, \quad \nabla_{s_M} \circ \varrho_M = \nabla_{r'_M} \circ \varrho_M = \varrho_M. \tag{3.1}$$

Prueba:
Obsérvese que en primer lugar tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\varphi_M \circ \nabla_{s_M} \\
&= (\varepsilon_D \otimes M) \circ \varrho_M \circ \varphi_M \circ \nabla_{s_M}
\end{aligned}$$

$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$
$$\circ(\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes s_M \otimes \varepsilon_D) \circ (\delta_D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$
$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$
$$\circ(\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes ((s_M \otimes \varepsilon_D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)) \circ (\delta_D \otimes M)$$
$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$
$$\circ(\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes M \otimes ((D \otimes \varepsilon_D) \circ \delta_D)) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$
$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$
$$\circ(\delta_D \otimes \varrho_M)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$
$$= (\varepsilon_D \otimes M) \circ \varrho_M \circ \varphi_M$$
$$= \varphi_M,$$

donde las igualdades primera y quinta y última se siguen de las propiedades de la counidad, la segunda de (e3) de la Definición 2.1.1 y (yd3-ii), y la tercera de la coasociatividad de δ_D. La cuarta igualdad es consecuencia de (e4) de la Definición 2.1.1 y la sexta de (yd3-ii).

Aplicando ahora la Proposición 3.1.9 se obtiene $\varrho_M = \nabla_{s_M} \circ \varrho_M$.

Finalmente, utilizando argumentos similares obtenemos las igualdades restantes. □

3.2. Estructura monoidal de la categoría ${}^D_D\mathcal{YD}$

En esta sección se presenta la estructura monoidal de la categoría ${}^D_D\mathcal{YD}$. Resultará claro a la vista de la definición que al restringirse al caso trenzado se recupera la estructura monoidal expuesta en [9], y en el caso simétrico la estructura clásica. Conviene sin embargo comentar que la construcción es diferente a la hecha en el caso trenzado, ya que las propiedades de naturalidad no son verdaderas y ciertos morfismos deben ser construidos de modo explícito.

3.2.1. Sea D una BTD en $\mathcal{C}$. Si (M, φ_M) y (N, φ_N) son D-módulos por la izquierda y existe una cuádrupla (r_M, r'_M, s_M, s'_M) formando un (M, D)-OD compatible con la estructura de módulo, se tiene el morfismo:

$$\nabla_{M\otimes N} = (\varphi_M \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes s_M \otimes N) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M \otimes N). \tag{3.2}$$

En el caso en que (M, ϱ_M) y (N, ϱ_N) sean D-comódulos por la izquierda y exista una cuádrupla (r_M, r'_M, s_M, s'_M) formando un (M, D)-OD compatible con la estructura de comódulo, el morfismo que se tiene es:

$$\Delta_{M\otimes N} = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M \otimes N) \circ (D \otimes r_M \otimes N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N). \tag{3.3}$$

En estas condiciones los morfismos (3.2) y (3.3) son idempotentes. En efecto, usando la compatibilidad del operador débil con la estructura de D- módulo, la propiedad de D-módulo de (M, φ_M) y (N, φ_N), junto con (e4) de la Definición 2.1.1 y (b4) de la Definición 1.2.9 resulta:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{M\otimes N} \circ \nabla_{M\otimes N} \\
&= (\varphi_M \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes \varphi_M \otimes D \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes D \otimes s_M \otimes D \otimes N) \\
&\quad \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes s_M \otimes N) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes M \otimes N) \\
&= (\varphi_M \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes s_M \otimes N) \circ (((\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\delta_D \circ \eta_D))) \otimes M \otimes N) \\
&= \nabla_{M\otimes N}.
\end{aligned}$$

La prueba para $\Delta_{M\otimes N}$ es similar.

Observación 3.2.2. Si $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ son dos morfismos de módulos Yetter-Drinfeld, entonces las condiciones expuestas en la Definición 3.1.3 implican:

(i) $\nabla_{M'\otimes N} \circ (f \otimes N) = (f \otimes N) \circ \nabla_{M\otimes N}$,

(ii) $\nabla_{M\otimes N'} \circ (M \otimes g) = (M \otimes g) \circ \nabla_{M\otimes N}$.

Los siguientes dos lemas nos permitirán probar con posterioridad que los morfismos $\nabla_{M\otimes N}$ y $\Delta_{M\otimes N}$ coinciden.

Lema 3.2.3. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Si $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ es un D-(co)módulo por la izquierda y (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD compatible con las estructuras de (co)módulo, entonces*

$$\nabla_{s'_M} \circ \nabla_{r_M} = \nabla_{r_M} \circ \nabla_{s'_M}. \tag{3.4}$$

Prueba:
En efecto:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{s'_M} \circ \nabla_{r_M} \\
&= (\varepsilon_D \otimes \nabla_{s'_M}) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) \\
&= (\varepsilon_D \otimes \nabla_{s'_M}) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes (t_{D,D} \circ t'_{D,D} \circ \delta_D)) \\
&= (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (\nabla_{s'_M} \otimes D) \circ (M \otimes (t'_{D,D} \circ \delta_D)) \\
&= (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (\varepsilon_D \otimes r_M \otimes D) \circ (s'_M \otimes t_{D,D}) \circ (M \otimes \delta_D \otimes D) \\
&\quad \circ (M \otimes (t'_{D,D} \circ \delta_D)) \\
&= (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (\varepsilon_D \otimes r_M \otimes D) \circ (s'_M \otimes \nabla_{D,D}) \circ (M \otimes t'_{D,D} \otimes D) \\
&\quad \circ (M \otimes ((D \otimes \delta_D) \circ \delta_D)) \\
&= (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (\varepsilon_D \otimes r_M \otimes D) \circ (s'_M \otimes D \otimes D) \circ (M \otimes (t'_{D,D} \circ \delta_D) \otimes D) \\
&\quad \circ (M \otimes \delta_D) \\
&= (\varepsilon_D \otimes M \otimes D) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) \circ \nabla_{s'_M} \\
&= \nabla_{r_M} \circ \nabla_{s'_M},
\end{aligned}$$

donde las igualdades primera, cuarta y última se siguen por (e3) de la Definición 2.1.1, la segunda por (1.2) y (b2-1) de la Definición 1.2.9, la tercera por la Proposición 2.1.8. La quinta igualdad es consecuencia de (b3-3) de la Definición 1.2.9 para $t'_{D,D}$ y (1.2), la sexta de (a2-2) de la Definición 1.2.4 para $t'_{D,D}$ y (b2-1) de la Definición 1.2.9. La séptima resulta del Corolario 2.1.18 y la fórmula (2.22). $\square$

Lema 3.2.4. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible; $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ un D-(co)módulo por la izquierda y (r_M, s'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD compatible con las estructuras de (co)módulo. Si además $(M, \varphi_M, \varrho_M) \in {}_D^D\mathcal{YD}$ entonces*

$$\begin{aligned} &(M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ ((\nabla_{s'_M} \circ r'_M \circ \varrho_M) \otimes D) \\ &= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ ((r'_M \circ \varrho_M) \otimes D). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Prueba:
La demostración de la igualdad es la siguiente:

$$\begin{aligned}
&(M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ ((\nabla_{s'_M} \circ r'_M \circ \varrho_M) \otimes D) \\
&= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D \circ (\overline{\Pi}_D^R \otimes D))) \circ ((\nabla_{s'_M} \circ r'_M \circ \varrho_M) \otimes D) \\
&= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ ((\nabla_{s'_M} \circ r'_M \circ (\overline{\Pi}_D^R \otimes M) \circ \varrho_M) \otimes D) \\
&= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ ((\nabla_{s'_M} \circ \nabla_{r_M}) \otimes D) \circ (\varphi_M \otimes D \otimes D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \\
&\circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M \otimes D) \\
&= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (((\nabla_{r_M} \circ \nabla_{s'_M}) \circ (\varphi_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \\
&\circ ((t_{D,D} \circ t'_{D,D} \circ \delta_D \circ \eta_D) \otimes M)) \otimes D) \\
&= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (\nabla_{r_M} \otimes D) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes \varphi_M \otimes D) \\
&\circ ((t'_{D,D} \circ \delta_D \circ \eta_D) \otimes M \otimes D) \\
&= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ ((\nabla_{r_M} \circ (\varphi_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \\
&\circ ((t_{D,D} \circ t'_{D,D} \circ \delta_D \circ \eta_D) \otimes M)) \otimes D) \\
&= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ ((\nabla_{r_M} \circ (\varphi_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M)) \otimes D) \\
&= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (r'_M \otimes D) \circ (((\overline{\Pi}_D^R \otimes M) \circ \varrho_M) \otimes D) \\
&= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ ((r'_M \circ \varrho_M) \otimes D).
\end{aligned}$$

En los cálculos anteriores, la primera igualdad se sigue de (1.32) y (1.50), la segunda de las Proposiciones 2.1.13 y 2.1.15. Las igualdades tercera y octava son consecuencia de (viii) de la Observación 3.1.8, la cuarta del Lema 3.2.3, (1.2) y (b2-1) de la Definición 1.2.9 y la quinta de la compatibilidad del operador débil con la estructura de módulo de M junto con (2.27). La sexta igualdad se sigue de nuevo por compatibilidad y la séptima por (1.2) y (b2-1). Finalmente la novena se sigue de la Proposición 2.1.15 junto con (1.32) y (1.50). □

Proposición 3.2.5. *Sea D un AHTD con antípodo inversible en $\mathcal{C}$. Si los triples $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ y $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ son objetos en ${}^D_D\mathcal{YD}$ entonces*

$$\nabla_{M\otimes N} = \Delta_{M\otimes N}. \tag{3.6}$$

Prueba:
La prueba es consecuencia de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{M\otimes N}\\
&= (\varphi_M \otimes \varphi_N) \circ (s'_M \otimes D \otimes N) \circ (M \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes N)\\
&= ((\varphi_M \circ s'_M) \otimes N) \circ (M \otimes ((\overline{\Pi}_D^L \otimes N) \circ \varrho_N))\\
&= ((\varphi_M \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes M) \circ s'_M) \otimes N) \circ (M \otimes \varrho_N)\\
&= ((((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes (r_M \circ s_M)) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M)) \otimes N)\\
&\quad \circ (s'_M \otimes N) \circ (M \otimes \varrho_N)\\
&= (((M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ ((t_{D,D} \circ t'_{D,D}) \otimes M)\\
&\quad \circ (D \otimes s'_M)) \otimes N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N)\\
&= (((M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D \circ t_{D,D})) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (t'_{D,D} \otimes M)\\
&\quad \circ (D \otimes s'_M)) \otimes N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N)\\
&= (((M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D \circ t_{D,D})) \circ ((s_M \circ s'_M) \otimes D) \circ (M \otimes t'_{D,D})\\
&\quad \circ (r'_M \otimes D)) \otimes N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N)
\end{aligned}$$

$$= (((M\otimes\varepsilon_D)\circ(\nabla_{s'_M}\circ(M\otimes(\mu_D\circ t_{D,D}\circ t'_{D,D})))\circ(r'_M\otimes D))\otimes N)\circ(\varrho_M\otimes\varrho_N)$$

$$= (M \otimes \varepsilon_D \otimes N) \circ ((\nabla_{s'_M} \circ (M \otimes \mu_D)) \circ (r'_M \otimes D)) \otimes N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N)$$

$$= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes N) \circ ((\nabla_{s'_M} \circ r'_M \circ \varrho_M) \otimes \varrho_N)$$

$$= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes N) \circ (r'_M \otimes D \otimes N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N)$$

$$= \Delta_{M\otimes N},$$

donde las igualdades primera y duodécima se siguen de las respectivas definiciones de $\nabla_{M\otimes N}$ y $\Delta_{M\otimes N}$ junto con la Proposición 2.1.12, la segunda resulta de (vi) de la Observación 3.1.8, la tercera de las Proposiciones 2.1.13 y 2.1.15, y la cuarta de (v) de la Proposición 3.1.8. La quinta igualdad es consecuencia de la compatibilidad del (M, D)-OD con la estructura de comódulo de M, la sexta de (e2-2) de la Definición 2.1.1 y la séptima de la Proposición 2.1.10.

La novena igualdad es consecuencia de (b1-1) de la Definición 1.2.9 y (1.2), la décima de (2.19) y la undécima del Lema 3.2.4.

En la octava igualdad se aplica la identidad

$$(M \otimes (\mu_D \circ t_{D,D})) \circ (\nabla_{s'_M} \otimes D) = \nabla_{s'_M} \circ (M \otimes (\mu_D \circ t_{D,D}))), \tag{3.7}$$

cuya demostración es:

$$(M \otimes (\mu_D \circ t_{D,D})) \circ (\nabla_{s'_M} \otimes D)$$

$$= (M\otimes(\mu_D\circ t_{D,D}))\circ(((M\otimes(\mu_D\circ t_{D,D}))\circ((s_M\circ(\eta_D\otimes M))\otimes D))\otimes D)$$

$$= (M \otimes (\mu_D \circ ((\mu_D \circ t_{D,D}) \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (t_{D,D} \otimes D)))$$

$$\circ((s_M \circ (\eta_D \otimes M)) \otimes D \otimes D)$$

$$= (M \otimes (\mu_D \circ t_{D,D})) \circ ((s_M \circ (\eta_D \otimes M)) \otimes (\mu_D \circ t_{D,D}))$$

$$= \nabla_{s'_M} \circ (M \otimes (\mu_D \circ t_{D,D}))),$$

siendo las igualdades primera y última consecuencia del Corolario 2.1.18, la segunda de (b3-2) de la Definición 1.2.9 y la asociatividad de μ_D y la cuarta de (a1) de la Definición 1.2.4 y (b3-1) de la Definición 1.2.9. □

3.2.6. En el Capítulo 1 fue establecido como hipótesis general que la categoría monoidal $\mathcal{C}$ de partida admite idempotentes escindidos.

En esta situación se denotará por $M \times N$ a la imagen del idempotente $\nabla_{M\otimes N}$ y por

$$p_{M\otimes N} : M \otimes N \to M \times N, \qquad i_{M\otimes N} : M \times N \to M \otimes N,$$

los morfismos tales que $i_{M\otimes N} \circ p_{M\otimes N} = \nabla_{M\otimes N}$ y $p_{M\otimes N} \circ i_{M\otimes N} = id_{M\times N}$.

De hecho el objeto $M \times N$ será tomado como el producto de M y N en la categoría ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$. Nótese que en virtud de la Proposición 3.2.5, si se definiera el producto en ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ mediante las estructuras de comódulo se obtendría el mismo objeto pues $\nabla_{M\otimes N} = \Delta_{M\otimes N}$.

Con el objetivo de dotar a ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ con una estructura monoidal, el objeto $M \times N$ debe equiparse con un operador débil. Para ello demostraremos unos lemas previos.

Lema 3.2.7. *Sea D una AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y $(M, \varphi_M, \varrho_M)$, $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ objetos de ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$. Se cumple que:*

(i) $(D\otimes\nabla_{M\otimes N})\circ(r_M\otimes N)\circ(M\otimes r_N) = (r_M\otimes N)\circ(M\otimes r_N)\circ(\nabla_{M\otimes N}\otimes D)$,

(ii) $(\nabla_{M\otimes N}\otimes D)\circ(M\otimes s_N)\circ(s_M\otimes N) = (M\otimes s_N)\circ(s_M\otimes N)\circ(D\otimes\nabla_{M\otimes N})$,

(iii) $(\nabla_{M\otimes N}\otimes D)\circ(M\otimes r'_N)\circ(r'_M\otimes N) = (M\otimes r'_N)\circ(r'_M\otimes N)\circ(D\otimes\nabla_{M\otimes N})$,

(iv) $(D\otimes\nabla_{M\otimes N})\circ(s'_M\otimes N)\circ(M\otimes s'_N) = (s'_M\otimes N)\circ(M\otimes s'_N)\circ(\nabla_{M\otimes N}\otimes D)$.

Prueba:
La prueba de (i) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
&(D \otimes \nabla_{M\otimes N}) \circ (r_M \otimes N) \circ (M \otimes r_N)\\
&= (D \otimes (((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M \otimes N) \circ (D \otimes r_M \otimes N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N))) \circ (r_M \otimes N)\\
&\quad \circ (M \otimes r_N)\\
&= (((D\otimes(\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes M)\circ(t_{D,D}\otimes r_M)\circ(D\otimes r_M\otimes D)\circ(D\otimes M\otimes t_{D,D}))\otimes N)\\
&\quad \circ(D \otimes M \otimes D \otimes r_N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N \otimes D)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (((D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (t_{D,D} \otimes D \otimes M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \\
&\quad \circ (D \otimes D \otimes r_M)) \otimes N) \circ (D \otimes r_M \otimes r_N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N \otimes D) \\
&= (((D \otimes \varepsilon_D \otimes M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (\mu_D \otimes r_M)) \otimes N) \circ (D \otimes r_M \otimes r_N) \\
&\quad \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N \otimes D) \\
&= ((((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D \otimes M) \circ (D \otimes \nabla_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes D \otimes r_M)) \otimes N) \\
&\quad \circ (D \otimes r_M \otimes r_N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N \otimes D) \\
&= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes r_M \otimes N) \circ (D \otimes r_M \otimes D \otimes N) \circ (\varrho_M \otimes \nabla_{D,D} \otimes N) \circ (M \otimes D \otimes r_N) \\
&\quad \circ (M \otimes \varrho_N \otimes D) \\
&= (r_M \otimes N) \circ (M \otimes r_N) \circ (\nabla_{M\otimes N} \otimes D).
\end{aligned}
$$

En estos cálculos, la primera igualdad se sigue de $\nabla_{M\otimes N} = \Delta_{M\otimes N}$, la segunda es consecuencia de la compatibilidad de los operadores débiles con las estructuras de comódulo y la tercera de (e1-1) de la Definición 2.1.1. La cuarta igualdad se sigue de (b3-1) de la Definición 1.2.9, la quinta de (1.19) y (b1-2) de la Definición 1.2.9; la sexta de (2.1). Finalmente, la séptima igualdad se obtiene gracias a que $\nabla_{M\otimes N} = \Delta_{M\otimes N}$ y a la igualdad

$$
(\nabla_{D,D} \otimes N) \circ (D \otimes r_N) \circ (\varrho_N \otimes D) = (D \otimes r_N) \circ (\varrho_N \otimes D), \tag{3.8}
$$

que a su vez puede deducirse como sigue:

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{D,D} \otimes N) \circ (D \otimes r_N) \circ (\varrho_N \otimes D) \\
&= (\nabla_{D,D} \otimes N) \circ (D \otimes r_N) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes N) \\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \varrho_N)) \otimes D) \\
&= (\nabla_{D,D} \otimes \varphi_N) \circ (\mu_D \otimes t_{D,D} \otimes N) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes r_N) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \varrho_N \otimes D) \\
&= (\mu_D \otimes D \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes \nabla_{D,D} \otimes D \otimes N) \circ (D \otimes D \otimes t_{D\otimes D} \otimes N) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes r_N) \\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \varrho_N \otimes D) \\
&= (\mu_D \otimes D \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes D \otimes t_{D,D} \otimes N) \circ (D \otimes (\nabla_{D,D} \circ t_{D,D}) \otimes r_N)
\end{aligned}
$$

$$\circ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \varrho_N \otimes D)$$

$$= (D \otimes r_N) \circ (\varrho_N \otimes D),$$

donde la primera igualdad se deduce de (yd1-ii), la segunda de la compatibilidad del operador débil con la estructura de módulo y (b1-2) de la Definición 1.2.9, la tercera por (a2) de la Definición 1.2.4 y la cuarta de nuevo por compatibilidad y (yd1-ii).

Mediante el mismo procedimiento se obtiene (iv); en la demostración se siguen los mismos pasos, tan solo cambia el hecho de usar (e2-4) en vez de (e1-1) de la Definición 2.1.1 en la tercera igualdad; (2.3) intercambiando los papeles de s'_M y r_M en vez de (2.1) en la sexta igualdad, y la fórmula

$$(\nabla_{D,D} \otimes N) \circ (D \otimes s'_N) \circ (\varrho_N \otimes D) = (D \otimes s'_N) \circ (\varrho_N \otimes D)$$

en vez de (3.8) en la séptima.

Las pruebas de los apartados (ii) y (iii) se deducen análogamente aplicando (i) del Lema 3.2.7. $\square$

3.2.8. Dados $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ y $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ objetos en ${}_D^D\mathcal{YD}$ se denotará por $\varphi_{M\otimes N}$ el morfismo $\varphi_{M\otimes N} : D \otimes M \otimes N \to M \otimes N$ definido por

$$\varphi_{M\otimes N} = (\varphi_M \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes s_M \otimes N) \circ (\delta_D \otimes M \otimes N), \tag{3.9}$$

y por $\varrho_{M\otimes N}$ el morfismo $\varrho_{M\otimes N} : M \otimes N \to D \otimes M \otimes N$ definido por

$$\varrho_{M\otimes N} = (\mu_D \otimes M \otimes N) \circ (D \otimes r_M \otimes N) \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N). \tag{3.10}$$

Nótese que si D es una BTD tenemos que $\nabla_{M\otimes N} = \varphi_{M\otimes N} \circ (\eta_D \otimes M \otimes N)$ y $\Delta_{M\otimes N} = (\varepsilon_D \otimes M \otimes N) \circ \varrho_{M\otimes N}$.

Lema 3.2.9. *Sea D una BTD en $\mathcal{C}$. Si $(M, \varphi_M, \varrho_M)$, $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ y $(P, \varphi_P, \varrho_P)$ son objetos en ${}_D^D\mathcal{YD}$ entonces:*

(i) $\varphi_{M\otimes N} \circ (D \otimes \nabla_{M\otimes N}) = \varphi_{M\otimes N} = \nabla_{M\otimes N} \circ \varphi_{M\otimes N}$,

(ii) $\varrho_{M\otimes N} \circ \Delta_{M\otimes N} = \varrho_{M\otimes N} = (D \otimes \Delta_{M\otimes N}) \circ \varrho_{M\otimes N}$.

Prueba:
Consecuencia evidente de las definiciones de $\varphi_{M\otimes N}$ y $\varrho_{M\otimes N}$. □

Proposición 3.2.10. *Sea D una BTD en $\mathcal{C}$ y $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ y $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ dos objetos en ${}^D_D\mathcal{YD}$. Entonces $(M \times N, \varphi_{M\times N})$ es un D-módulo por la izquierda y $(M \times N, \varrho_{M\times N})$ un D-comódulo por la izquierda, donde:*

$$\varphi_{M\times N} = p_{M\otimes N} \circ \varphi_{M\otimes N} \circ (D \otimes i_{M\otimes N}), \tag{3.11}$$

$$\varrho_{M\times N} = (D \otimes p_{M\otimes N}) \circ \varrho_{M\otimes N} \circ i_{M\otimes N}. \tag{3.12}$$

Prueba:
El par $(M \times N, \varphi_{M\times N})$ es un módulo por la izquierda ya que la primera condición se sigue por la definición de $\varphi_{M\times N}$ y las propiedades de la escisión:

$$\varphi_{M\times N} \circ (\eta_D \otimes M \times N) = p_{M\times N} \circ \nabla_{M\otimes N} \circ (i_{M\times N}) = id_{M\times N}.$$

La segunda condición también se cumple:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{M\times N} \circ (\mu_D \otimes (M \times N)) \\
&= p_{M\otimes N} \circ (\varphi_M \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes s_M \otimes N) \circ ((\delta_D \circ \mu_D) \otimes i_{M\otimes N}) \\
&= p_{M\otimes N} \circ (\varphi_M \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes s_M \otimes N) \circ (((\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
&\quad \circ (\delta_D \otimes \delta_D))) \otimes i_{M\otimes N}) \\
&= p_{M\otimes N} \circ (\varphi_M \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D \otimes N) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \\
&\quad \circ (t_{D,D} \otimes s_M))) \circ (\delta_D \otimes \delta_D \otimes i_{M\otimes N}) \\
&= p_{M\otimes N} \circ (\varphi_M \otimes \varphi_N) \circ (D \otimes s_M \otimes N) \circ (\delta_D \otimes \varphi_{M\otimes N}) \circ (D \otimes D \otimes i_{M\otimes N}) \\
&= p_{M\otimes N} \circ \varphi_{M\otimes N} \circ (D \otimes (\nabla_{M\otimes N} \circ \varphi_{M\otimes N} \circ (D \otimes i_{M\otimes N}))) \\
&= \varphi_{M\times N} \circ (D \otimes \varphi_{M\times N}),
\end{aligned}$$

donde la primera y la última igualdad se siguen de la definición de $\varphi_{M\times N}$, la segunda es consecuencia de (b4) de la Definición 1.2.9, la tercera de (e4-5) de la Definición 2.1.1 y del carácter de D-módulo por la izquierda de M. La cuarta igualdad se deduce de la compatibilidad del (M, D)-OD con la estructura de módulo y la condición de módulo de N, la quinta de (i) del Lema 3.2.9.

La prueba para la estructura de D-comódulo por la izquierda es análoga.□

Proposición 3.2.11. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Dados $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ y $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ en ${}_D^D\mathcal{YD}$, la cuádrupla $(r_{M\times N}, r'_{M\times N}, s_{M\times N}, s'_{M\times N})$ donde:*

$$r_{M\times N} = (D \otimes p_{M\otimes N}) \circ (r_M \otimes N) \circ (M \otimes r_N) \circ (i_{M\otimes N} \otimes D),$$

$$r'_{M\times N} = (p_{M\otimes N} \otimes D) \circ (M \otimes r'_N) \circ (r'_M \otimes N) \circ (D \otimes i_{M\otimes N}),$$

$$s_{M\times N} = (p_{M\otimes N} \otimes D) \circ (M \otimes s_N) \circ (s_M \otimes N) \circ (D \otimes i_{M\otimes N}),$$

$$s'_{M\times N} = (D \otimes p_{M\otimes N}) \circ (s'_M \otimes N) \circ (M \otimes s'{}_N) \circ (i_{M\otimes N} \otimes D),$$

es un $(M \times N, D)$-OD compatible con las estructuras de módulo-comódulo de $(M \times N, \varphi_{M\times N}, \varrho_{M\times N})$ definidas en la Proposición 3.2.10.

Prueba:
Para probar el resultado debe ser comprobado que se cumplen las condiciones establecidas en las Definiciones 2.1.1, 2.2.3 y 2.2.4. La demostración de (e1), (e2) y (e4) de la Definición 2.1.1 se realiza aplicando la propiedad correspondiente para r_M y r_N, el Lema 3.2.7 y la igualdad $\nabla_{M\otimes N} = i_{M\otimes N} \circ p_{M\otimes N}$. Puesto que el procedimiento es el mismo en todos los casos explicitamos solamente (e1-1) de la Definición 2.1.1 para ilustrar las demostraciones.

$$\begin{aligned}
&(D \otimes r_{M\times N}) \circ (r_{M\times N} \otimes D) \circ (M \times N \otimes t_{D,D})\\
&= (D\otimes D\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes r_M\otimes N)\circ(D\otimes M\otimes r_N)\circ(((D\otimes\nabla_{M\otimes N})\circ(r_M\otimes N)\\
&\quad \circ(M \otimes r_N)) \otimes D) \circ (i_{M\otimes N} \otimes t_{D,D})\\
&= (D \otimes D \otimes p_{M\otimes N}) \circ (D \otimes r_M \otimes N) \circ (r_M \otimes r_N) \circ (M \otimes r_N \otimes D)\\
&\quad \circ(i_{M\otimes N} \otimes t_{D,D})\\
&= (t_{D,D}\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes r_M\otimes N)\circ(r_M\otimes r_N)\circ(M\otimes r_N\otimes D)\circ(i_{M\otimes N}\otimes D\otimes D)\\
&= (t_{D,D}\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes r_M\otimes N)\circ(D\otimes M\otimes r_N)\circ(((D\otimes\nabla_{M\otimes N})\circ(r_M\otimes N)
\end{aligned}$$

$$\circ(M \otimes r_N) \circ (i_{M\otimes N} \otimes D)) \otimes D)$$

$$= (t_{D,D} \otimes M \times N) \circ (D \otimes r_{M\times N}) \circ (r_{M\times N} \otimes D).$$

En los cálculos precedentes, la primera y la última igualdad se tienen gracias a la definición de $r_{M\times N}$, la segunda y la cuarta son consecuencia del Lema 3.2.7; la tercera resulta aplicando (e1-1) de la Definición 2.1.1 para r_N y r_M.

La condición (e5) de la Definición 2.1.2 se sigue directamente sin más que aplicar la Proposición 2.1.17 para M y N.

En lo que respecta a (e3) de la Definición 2.1.1, de nuevo explicitamos la prueba de (e3-1) puesto que la de (e3-2) es totalmente análoga.

$$\nabla_{r_{M\times N}}$$

$$= r'_{M\times N} \circ r_{M\times N}$$

$$= (p_{M\otimes N} \otimes D) \circ (M \otimes r'_N) \circ (r'_M \otimes N) \circ (D \otimes \nabla_{M\otimes N}) \circ (r_M \otimes N) \circ (M \otimes r_N)$$

$$\circ(i_{M\otimes N} \otimes D)$$

$$= (p_{M\otimes N} \otimes D) \circ (M \otimes r'_N) \circ (\nabla_{r_M} \otimes N) \circ (M \otimes r_N) \circ (i_{M\otimes N} \otimes D)$$

$$= (\varepsilon_D \otimes p_{M\otimes N} \otimes D) \circ (r_M \otimes r'_N) \circ (M \otimes \delta_D \otimes N) \circ (M \otimes r_N) \circ (i_{M\otimes N} \otimes D)$$

$$= (\varepsilon_D \otimes p_{M\otimes N} \otimes D) \circ (r_M \otimes \nabla_{r_N}) \circ (M \otimes r_N \otimes D) \circ (i_{M\otimes N} \otimes \delta_D)$$

$$= (((\varepsilon_D \otimes p_{M\otimes N}) \circ (r_M \otimes \varepsilon_D \otimes N) \circ (M \otimes D \otimes r_N)) \otimes D)$$

$$\circ(M \otimes r_N \otimes \delta_D) \circ (i_{M\otimes N} \otimes \delta_D)$$

$$= (((\varepsilon_D \otimes p_{M\otimes N}) \circ (r_M \otimes \varepsilon_D \otimes N) \circ (M \otimes \delta_D \otimes N) \circ (M \otimes r_N)) \otimes D)$$

$$\circ(i_{M\otimes N} \otimes \delta_D)$$

$$= (((\varepsilon_D \otimes M \times N) \circ r_{M\times N}) \otimes D) \circ (M \times N \otimes \delta_D).$$

En estos últimos cálculos la primera igualdad se sigue por la definición de $\nabla_{r_{M\times N}}$, la segunda por la propiedad de la escisión $\nabla_{M\otimes N} = i_{M\otimes N} \circ p_{M\otimes N}$ y las definiciones de $r_{M\times N}$ y $r'_{M\times N}$. La tercera igualdad es cierta en virtud del Lema 3.2.7, la cuarta por la condición (e3-1) de la Definición 2.1.1 para

∇_{r_M}. La quinta se sigue de (e4-3) de la Definición 2.1.1, la sexta por (e3-1) de la Definición 2.1.1 para ∇_{r_N}. Finalmente, la séptima igualdad es consecuencia de la coasociatividad de δ_D y (e4-3), la octava se sigue por la propiedad de la counidad ε_D y la definición de $r_{M\times N}$.

Para terminar con esta condición, razonando de modo similar pero intercambiando los roles de las propiedades de álgebra y de módulo por las de coálgebra y comódulo respectivamente se concluye que

$$\nabla_{r_{M\times N}} = (M\times N\otimes \mu_D)\circ (r'_{M\times N}\otimes D)\circ (\eta_D\otimes M\times N\otimes D).$$

La compatibilidad del operador débil con la estructura de módulo se obtiene ya que:

$$\begin{aligned}
&r_{M\times N}\circ (\varphi_{M\times N}\otimes D)\\
&= (D\otimes p_{M\otimes N})\circ (r_M\otimes N)\circ (M\otimes r_N)\circ ((\nabla_{M\otimes N}\circ \varphi_{M\otimes N}\circ (D\otimes i_{M\otimes N}))\otimes D)\\
&= (D\otimes p_{M\otimes N})\circ (r_M\otimes N)\circ (M\otimes r_N)\circ (((\varphi_M\otimes \varphi_N)\circ (D\otimes s_M\otimes N)\\
&\quad \circ(\delta_D\otimes i_{M\otimes N}))\otimes D)\\
&= (D\otimes p_{M\otimes N})\circ (D\otimes \varphi_M\otimes N)\circ (t_{D,D}\otimes M\otimes N)\circ (D\otimes ((r_M\otimes \varphi_N)\\
&\quad \circ(M\otimes t_{D,D}\otimes N)\circ (s_M\otimes r_N)))\circ (\delta_D\otimes i_{M\otimes N}\otimes D)\\
&= (D\otimes (p_{M\otimes N}\circ (\varphi_M\otimes \varphi_N)))\circ (t_{D,D}\otimes s_M\otimes N)\circ (D\otimes t_{D,D}\otimes M\otimes N)\\
&\quad \circ(\delta_D\otimes ((r_M\otimes N)\circ (M\otimes r_N)\circ (i_{M\otimes N}\otimes D)))\\
&= (D\otimes p_{M\otimes N})\circ (D\otimes (\varphi_{M\otimes N}\circ \nabla_{M\otimes N}))\circ (t_{D,D}\otimes M\otimes N)\\
&\quad \circ(D\otimes ((r_M\otimes N)\circ (M\otimes r_N)\circ (i_{M\otimes N}\otimes D)))\\
&= (D\otimes \varphi_{M\times N})\circ (t_{D,D}\otimes M\times N)\circ (D\otimes r_{M\times N}).
\end{aligned}$$

En los cálculos precedentes las igualdades primera y última se siguen por la definición de $\varphi_{M\times N}$ y $r_{M\times N}$, la segunda por (i) del Lema 3.2.9 y la definición de $\varphi_{M\otimes N}$, la tercera por la compatibilidad de los operadores débiles asociados a M y N con las correspondientes estructuras de módulo. La cuarta igualdad es consecuencia de (i) de la Proposición 2.1.10, la quinta es cierta por (b3-4) de la Definición 1.2.9 y (i) del Lema 3.2.9.

Las demostraciones para $r'_{M\times N}$, $s_{M\times N}$ y $s'_{M\times N}$, son análogas, mientras que la compatibilidad con la estructura de comódulo usa argumentos similares. □

Proposición 3.2.12. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Si los triples (M,φ_M,ϱ_M) y (N,φ_N,ϱ_N) son ambos objetos en ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$, entonces el triple $(M\times N,\varphi_{M\times N},\varrho_{M\times N})$ es un objeto en ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$.*

Prueba:
En la Proposición 3.2.10 se demostró que $(M\times N,\varphi_{M\times N})$ es un D-módulo por la izquierda y $(M\times N,\varrho_{M\times N})$ un D-comódulo por la izquierda, mientras que en la Proposición 3.2.11 se definió un $(M\times N,D)$-OD compatible con la estructuras anteriores. Solo resta demostrar que se satisfacen las condiciones (yd1-ii) e (yd2-ii).

Para probar la condición (yd1-ii) se comienza demostrando la igualdad:

$$p_{M\otimes N}\circ(\varphi_M\otimes N)\circ(\Pi_D^L\otimes i_{M\otimes N}) = ((\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes M\times N)\circ(\Pi_D^L\otimes\varrho_{M\times N}), \quad (3.13)$$

que es cierta pues:

$$\begin{aligned}
&((\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes M\times N)\circ(\Pi_D^L\otimes\varrho_{M\times N})\\
&= ((\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes\mu_D\otimes M\otimes N)\circ(D\otimes D\otimes r_M\otimes N)\\
&\quad\circ(\Pi_D^L\otimes((\varrho_M\otimes\varrho_N)\circ i_{M\otimes N}))\\
&= ((\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes(\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes\delta_D\otimes r_M\otimes N)\\
&\quad\circ(\Pi_D^L\otimes((\varrho_M\otimes\varrho_N)\circ i_{M\otimes N}))\\
&= ((\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes(\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes D\otimes D\otimes r_M\otimes N)\\
&\quad\circ(D\otimes D\otimes\varrho_M\otimes D\otimes N)\circ(\Pi_D^L\otimes((\varrho_M\otimes\varrho_N)\circ i_{M\otimes N}))\\
&= p_{M\otimes N}\circ\nabla_{M\otimes N}\circ(\varphi_M\otimes N)\circ(\Pi_D^L\otimes i_{M\otimes N})\\
&= p_{M\otimes N}\circ(\varphi_M\otimes N)\circ(\Pi_D^L\otimes i_{M\otimes N}),
\end{aligned}$$

donde las igualdades primera y última se siguen de las definiciones de $\varrho_{M\times N}$ y $\nabla_{M\otimes N}$, la segunda por (b5) de la Definición 1.2.9, la tercera de la condición de comódulo de M. La cuarta es consecuencia de (3.6) y (i) de la Observación 3.1.8.

Por lo tanto:

$$\varphi_{M\times N}\circ(\Pi_D^L\otimes M\times N) = ((\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes M\times N)\circ(\Pi_D^L\otimes\varrho_{M\times N}). \tag{3.14}$$

En efecto, por (i) de la Observación 3.1.8:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{M\times N}\circ(\Pi_D^L\otimes M\times N)\\
&= p_{M\otimes N}\circ(\varphi_M\otimes\varphi_N)\circ(\mu_D\otimes s_M\otimes N)\circ(\Pi_D^L\otimes(\delta_D\circ\eta_D)\otimes i_{M\otimes N})\\
&= p_{M\otimes N}\circ(\varphi_M\otimes N)\circ(D\otimes\varphi_{M\otimes N})\circ(\Pi_D^L\otimes\eta_D\otimes i_{M\otimes N})\\
&= p_{M\otimes N}\circ(\varphi_M\otimes N)\circ(D\otimes(\nabla_{M\otimes N}\circ\varphi_{M\otimes N}))\circ(\Pi_D^L\otimes\eta_D\otimes i_{M\otimes N})\\
&= p_{M\otimes N}\circ(\varphi_M\otimes N)\circ(\Pi_D^L\otimes i_{M\otimes N})\\
&= ((\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes M\times N)\circ(\Pi_D^L\otimes\varrho_{M\times N}).
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando (3.14):

$$\begin{aligned}
&\varphi_{M\times N}\circ(\Pi_D^L\otimes M\times N)\circ\varrho_{M\times N}\\
&= ((\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes M\times N)\circ(\Pi_D^L\otimes\varrho_{M\times N})\circ(\varrho_{M\times N})\\
&= (\varepsilon_D\otimes M\times N)\circ((\Pi_D^L\wedge D)\otimes M\times N)\circ\varrho_{M\times N}\\
&= (\varepsilon_D\otimes M\times N)\circ\varrho_{M\times N}.\\
&= id_{M\times N},
\end{aligned}$$

y como consecuencia se obtiene la condición (yd1-ii) ya que

$$\begin{aligned}
&(\mu_D\otimes\varphi_{M\times N})\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M\times N)\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes\varrho_{M\times N})\\
&= (D\otimes\varphi_{M\times N})\circ(D\otimes\Pi_D^L\otimes M\times N)\circ(\delta_D\otimes M\times N)\circ\varrho_{M\times N}\\
&= (D\otimes(\varphi_{M\times N}\circ(\Pi_D^L\otimes M\times N)\circ\varrho_{M\times N}))\circ\varrho_{M\times N}
\end{aligned}$$

$= \varrho_{M\times N}.$

La prueba de la condición (yd2-ii) es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&(\mu_D \otimes M\times N)\circ(D\otimes r_{M\times N})\circ((\varrho_{M\times N}\circ\varphi_{M\times N})\otimes D)\circ(D\otimes s_{M\times N})\\
&\circ(\delta_D\otimes M\times N)\\
&=(\mu_D\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes r_M\otimes N)\circ(D\otimes M\otimes r_N)\circ(((\mu_D\otimes(i_{M\otimes N}\circ p_{M\otimes N}))\\
&\circ(D\otimes r_M\otimes N)\circ(\varrho_M\otimes\varrho_N)\circ i_{M\otimes N}\circ p_{M\otimes N}\circ(\varphi_M\otimes\varphi_N)\circ(D\otimes s_M\otimes N)\\
&\circ(\delta_D\otimes i_{M\otimes N}))\otimes D)\circ(D\otimes((p_{M\otimes N}\otimes D)\circ(M\otimes s_N)\circ(s_M\otimes N)))\\
&\circ(\delta_D\otimes i_{M\otimes N})\\
&=(\mu_D\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes r_M\otimes N)\circ((\varrho_M\circ\varphi_M)\otimes((\mu_D\otimes N)\circ(D\otimes r_N)\\
&\circ((\varrho_N\circ\varphi_N)\otimes D)\circ(D\otimes s_N)\circ(\delta_D\otimes N)))\circ(D\otimes s_M\otimes N)\circ(\delta_D\otimes i_{M\otimes N})\\
&=(\mu_D\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes r_M\otimes N)\circ((\varrho_M\circ\varphi_M)\otimes((\mu_D\otimes\varphi_M)\\
&\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes N)\circ(\delta_D\otimes\varrho_N)))\circ(D\otimes s_M\otimes N)\circ(\delta_D\otimes i_{M\otimes N})\\
&=(\mu_D\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes r_M\otimes\varphi_N)\circ(((\mu_D\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\\
&\circ((\varrho_M\circ\varphi_M)\otimes D)\circ(D\otimes s_M)\circ(\delta_D\otimes M))\otimes t_{D,D}\otimes N)\\
&\circ(D\otimes s_M\otimes\varrho_N)\circ(\delta_D\otimes i_{M\otimes N})\\
&=(\mu_D\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes r_M\otimes\varphi_N)\circ(((\mu_D\otimes\varphi_M)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M)\\
&\circ(\delta_D\otimes\varrho_M))\otimes t_{D,D}\otimes N)\circ(D\otimes s_M\otimes\varrho_N)\circ(\delta_D\otimes i_{M\otimes N})\\
&=(\mu_D\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes((D\otimes\varphi_M\otimes N)\circ(t_{D,D}\otimes M\otimes N)\circ(D\otimes r_M\otimes\varphi_N)))\\
&\circ(\mu_D\otimes D\otimes M\otimes t_{D,D}\otimes N)\circ(D\otimes((t_{D,D}\otimes s_M\otimes D\otimes N)\\
&\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M\otimes D\otimes N)\circ(\delta_D\otimes\varrho_M\otimes\varrho_N)))\circ(\delta_D\otimes i_{M\otimes N})\\
&=(\mu_D\otimes p_{M\otimes N})\circ(D\otimes((\mu_D\otimes\varphi_M\otimes\varphi_N)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes s_M\otimes N)\\
&\circ(t_{D,D}\otimes t_{D,D}\otimes M\otimes N)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes r_M\otimes N)\circ(\delta_D\otimes\varrho_M\otimes\varrho_N)))
\end{aligned}
$$

$$\circ(\delta_D \otimes i_{M\otimes N})$$

$$= (\mu_D \otimes (p_{M\otimes N} \circ \varphi_{M\otimes N})) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M \otimes N) \circ (\delta_D \otimes (\varrho_{M\otimes N} \circ i_{M\otimes N}))$$

$$= (\mu_D \otimes \varphi_{M\times N}) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M \times N) \circ (\delta_D \otimes \varrho_{M\times N}).$$

En los cálculos precedentes, la primera igualdad se sigue por las definiciones de $\varphi_{M\times N}$, $\varrho_{M\times N}$ y $(r_{M\times N}, r'_{M\times N}, s_{M\times N}, s'_{M\times N})$, la segunda es consecuencia de (i) del Lema 3.2.9, de la asociatividad de μ_D, la coasociatividad de δ_D y (e4) de la Definición 2.1.1. Las igualdades tercera y quinta se siguen de la condición (yd2-ii) para N y M respectivamente, la cuarta de (e4) de la Definición 2.1.1, la asociatividad de μ_D y la coasociatividad deδ_D. Por su parte, la sexta es cierta por la compatibilidad del (M, D)-OD con las estructuras de D-(co)módulo, la séptima por la asociatividad de μ_D y la Proposición 2.1.10. Finalmente la octava se sigue aplicando (b3-1) y después (b3-3) de la Definición 1.2.9; la novena es consecuencia de (i) del Lema 3.2.9 y las definiciones de las (co)estructuras de (co)módulo de $M \times N$. □

La siguiente proposición permitirá definir el objeto base de la categoría ${}^D_D\mathcal{YD}$.

Proposición 3.2.13. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Se cumple que $(D_L, \varphi_{D_L}, \varrho_{D_L})$ es un objeto de ${}^D_D\mathcal{YD}$; siendo $D_L = Im(\Pi^L_D)$ con estructura:*

$$\varphi_{D_L} = p_L \circ \mu_D \circ (D \otimes i_L), \quad \varrho_{D_L} = (D \otimes p_L) \circ \delta_D \circ i_L, \tag{3.15}$$

donde $p_L : D \to D_L$ y $i_L : D_L \to D$ los morfismos tales que $\Pi^L_D = i_L \circ p_L$ y $p_L \circ i_L = id_{D_L}$.

El (D_L, D)-OD asociado está dado por $(r_{D_L}, r'_{D_L}, s_{D_L}, s'_{D_L})$ donde

$$r_{D_L} := (D \otimes p_L) \circ t_{D,D} \circ (i_L \otimes D), \quad r'_{D_L} := (p_L \otimes D) \circ t'_{D,D} \circ (D \otimes i_L),$$

$$s_{D_L} := (p_L \otimes D) \circ t_{D,D} \circ (D \otimes i_L), \quad s'_{D_L} := (D \otimes p_L) \circ t'_{D,D} \circ (i_L \otimes D).$$

Prueba:
Las estructuras definidas son de D-(co)módulo por la izquierda, pues en virtud de la propiedad de la unidad para álgebras y las propiedades de la escisión:

$$\varphi_{D_L} \circ (\eta_D \otimes D_L) = p_L \circ \mu_D \circ (\eta_D \otimes i_L) = p_L \circ i_L = id_{D_L},$$

mientras que por la asociatividad de μ_D, (1.52) y ser p_L un epimorfismo:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{D_L} \circ (\mu_D \otimes D_L) \\
&= p_L \circ \mu_D \circ (\mu_D \otimes i_L) \\
&= p_L \circ \mu_D \circ (D \otimes (\mu_D \circ (D \otimes i_L))) \\
&= p_L \circ \mu_D \circ (D \otimes (\Pi_D^L \circ \mu_D \circ (D \otimes i_L))) \\
&= \varphi_{D_L} \circ (D \otimes \varphi_{D_L}).
\end{aligned}$$

La prueba para la estructura de comódulo se realiza de una forma análoga, esto es, usando la propiedad de la counidad ε_D, (1.51) y el carácter mónico de i_L en vez de la propiedad de la unidad η_D, (1.52) y el carácter épico de p_L respectivamente.

La cuádrupla $(r_{D_L}, r'_{D_L}, s_{D_L}, s'_{D_L})$ es un (D_L, D)-OD pues siendo D un AHTD con operador Yang-Baxter débil asociado $t_{D,D}$, entonces $(t_{D,D}, t'_{D,D}, t_{D,D}, t'_{D,D})$ es un (D, D)-OD y en virtud de (1.35) y (1.36) se cumplen las hipótesis del Lema 2.1.20.

El (D_L, D)-OD considerado es compatible con la estructura de D-módulo por la izquierda. Se explicita una de las igualdades para ilustrar el procedimiento de prueba, siendo las pruebas de las otras análogas. En efecto:

$$\begin{aligned}
&r_{D_L} \circ (\varphi_{D_L} \otimes D) \\
&= (D \otimes p_L) \circ t_{D,D} \circ ((i_L \circ p_L \circ \mu_D \circ (D \otimes i_L)) \otimes D) \\
&= (D \otimes (p_L \circ \mu_D)) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (D \otimes i_L \otimes D) \\
&= (D \otimes (p_L \circ \mu_D)) \circ (t_{D,D} \otimes (i_L \circ p_L)) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (D \otimes i_L \otimes D) \\
&= \varphi_{D_L} \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes r_{D_L}),
\end{aligned}$$

donde las igualdades primera y última se siguen de la definición de φ_{D_L} y r_{D_L}, la segunda por (1.35), (b3-1) de la Definición 1.2.9 y las propiedades de la escisión, la tercera por (1.52).

La demostración de la compatibilidad con la estructura de comódulo se realiza siguiendo argumentos análogos.

Resta ahora constatar que el objeto considerado cumple las condiciones (yd1-ii) e (yd2-ii). La igualdad contenida en (yd1-ii) es sencilla de comprobar, basta con usar las definiciones, (1.52), (b4) de la Definición 1.2.9 y la propiedad de la unidad para álgebras de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&(\mu_D \otimes \varphi_{D_L}) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D_L) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \varrho_{D_L}) \\
&= (\mu_D \otimes (p_L \circ \mu_D)) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes (i_L \circ p_L)) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\delta_D \circ i_L)) \\
&= (D \otimes p_L) \circ \delta_D \circ \mu_D \circ (\eta_D \otimes i_L) \\
&= \varrho_{D_L}.
\end{aligned}
$$

En cuanto a la condición (yd2-ii), por una parte, gracias a (1.51) y (b4) de la Definición 1.2.9 se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&(\mu_D \otimes \varphi_{D_L}) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D_L) \circ (\delta_D \otimes \varrho_{D_L}) \\
&= (\mu_D \otimes (p_L \circ \mu_D)) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes \Pi_D^L) \circ (\delta_D \otimes (\delta_D \circ i_L)) \\
&= (D \otimes p_L) \circ \delta_D \circ \mu_D \circ (D \otimes i_L).
\end{aligned}
$$

Por otro lado tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&(\mu_D \otimes D_L) \circ (D \otimes r_{D_L}) \circ ((\varrho_{D_L} \circ \varphi_{D_L}) \otimes D) \circ (D \otimes s_{D_L}) \circ (\delta_D \otimes D_L) \\
&= (\mu_D \otimes p_L) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (D \otimes \Pi_D^L \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \Pi_D^L \circ \mu_D) \otimes D) \\
&\quad \circ (D \otimes \Pi_D^L \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes i_L) \\
&= (\mu_D \otimes p_L) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (D \otimes \Pi_D^L \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \Pi_D^L \circ \mu_D) \otimes D) \\
&\quad \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes i_L) \\
&= (\mu_D \otimes p_L) \circ (\mu_D \otimes t_{D,D}) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\Pi_D^L \circ \mu_D) \otimes D) \\
&\quad \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes i_L) \\
&= (\mu_D \otimes p_L) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\Pi_D^L \circ \mu_D) \otimes \mu_D) \\
&\quad \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes \Pi_D^L) \circ (\delta_D \otimes (\delta_D \circ i_L)) \\
&= (\mu_D \otimes p_L) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\mu_D \circ (\Pi_D^L \otimes D) \circ \delta_D)) \circ \mu_D \circ (D \otimes i_L) \\
&= (D \otimes (p_L \circ \Pi_D^L)) \circ \delta_D \circ \mu_D \circ (D \otimes i_L)
\end{aligned}
$$

$$= (D \otimes p_L) \circ \delta_D \circ \mu_D \circ (D \otimes i_L),$$

donde la primera igualdad se sigue por las definiciones de φ_{D_L} y ϱ_{D_L}, y la propiedad de la escisión de Π_D^L, la segunda por (1.52) y la tercera por (1.43). La quinta igualdad es consecuencia de (1.51), la sexta de (1.30) y (1.43), la séptima de las propiedades de la escisión del idempotente Π_D^L. Finalmente, la cuarta igualdad se cumple ya que

$$(\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D) = (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes \Pi_D^L) \circ (\delta_D \otimes \delta_D), \quad (3.16)$$

que a su vez es cierta pues gracias a (1.39), (b3-4) y (b4) de la Definición 1.2.9 y la propiedad de la counidad se tiene que

$$\begin{aligned}
&(\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes \Pi_D^L) \circ (\delta_D \otimes \delta_D) \\
&= (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (D \otimes D \otimes t_{D,D}) \circ (\mu_D \otimes \delta_D \otimes D) \\
&\quad \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D) \\
&= (((D \otimes \varepsilon_D) \circ \delta_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D) \\
&= (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.14. *Sea D una BTD en $\mathcal{C}$. Si $(M, \varphi_M, \varrho_M)$, $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ y $(P, \varphi_P, \varrho_P)$ son objetos en ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$ entonces:*

$$\begin{aligned}
&(i_{M \otimes N} \otimes P) \circ \nabla_{(M \times N) \otimes P} \circ (p_{M \otimes N} \otimes P) \\
&= (M \otimes i_{N \otimes P}) \circ \nabla_{M \otimes (N \times P)} \circ (M \otimes p_{N \otimes P})
\end{aligned} \quad (3.17)$$

y

$$\begin{aligned}
&(M \otimes i_{N \otimes P}) \circ \nabla_{M \otimes (N \times P)} \circ (M \otimes p_{N \otimes P}) \\
&= (\nabla_{M \otimes N} \otimes P) \circ (M \otimes \nabla_{N \otimes P}) \\
&= (M \otimes \nabla_{N \otimes P}) \circ (\nabla_{M \otimes N} \otimes P).
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Prueba:
La prueba de (3.17) es consecuencia de las siguientes identidades:

$$
\begin{aligned}
&(i_{M\otimes N} \otimes P) \circ \nabla_{(M\times N)\otimes P} \circ (p_{M\otimes N} \otimes P) \\
&= (\nabla_{M\otimes N} \otimes P) \circ (\varphi_{M\otimes N} \otimes \varphi_P) \circ (D \otimes \nabla_{M\otimes N} \otimes D \otimes P) \circ (D \otimes M \circ s_N \otimes P) \\
&\quad \circ (D \otimes s_M \otimes N \otimes P) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \circ \nabla_{M\otimes N} \otimes P) \\
&= (\varphi_{M\otimes N} \otimes \varphi_P) \circ (D \otimes M \otimes s_N \otimes P) \circ (D \otimes s_M \otimes N \otimes P) \\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M \otimes N \otimes P) \\
&= (\varphi_M \otimes \varphi_{N\otimes P}) \circ (D \otimes s_M \otimes N \otimes P) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M \otimes N \otimes P) \\
&= (M \otimes \nabla_{N\otimes P}) \circ (\varphi_M \otimes \varphi_{M\otimes N}) \circ (D \otimes s_M \otimes N \otimes P) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M \otimes \nabla_{N\otimes P}) \\
&= (M \otimes i_{N\otimes P}) \circ \nabla_{M\otimes(N\times P)} \circ (M \otimes p_{N\otimes P}),
\end{aligned}
$$

donde las igualdades primera y quinta son consecuencia de las definiciones de $\nabla_{M\otimes N}$ y $\varphi_{M\otimes N}$, la segunda se sigue de (i) del Lema 3.2.9 y el Lema 3.2.7, la tercera de la coasociatividad de δ_D y (e4-7) de la Definición 2.1.1. Finalmente, en la cuarta se usa (i) del Lema 3.2.9.

Para demostrar (3.18), nótese en primer lugar que en la prueba de (3.17) se obtuvo que:

$$
\begin{aligned}
&(i_{M\otimes N} \otimes P) \circ \nabla_{(M\times N)\otimes P} \circ (p_{M\otimes N} \otimes P) \\
&= (\varphi_M \otimes \varphi_{N\otimes P}) \circ (D \otimes s_M \otimes N \otimes P) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M \otimes N \otimes P).
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&(i_{M\otimes N} \otimes P) \circ \nabla_{(M\times N)\otimes P} \circ (p_{M\otimes N} \otimes P) \\
&= (\varphi_M \otimes \varphi_{N\otimes P}) \circ (D \otimes s_M \otimes N \otimes P) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M \otimes N \otimes P) \\
&= (\varphi_M \otimes \varphi_N \otimes \varphi_P) \circ (D \otimes s_M \otimes s_N \otimes P) \circ (D \otimes D \otimes s_M \otimes N \otimes P) \\
&\quad \circ (D \otimes \delta_D \otimes M \otimes N \otimes P) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M \otimes N \otimes P) \\
&= (\varphi_M \otimes \varphi_N \otimes \varphi_P) \circ (D \otimes s_M \otimes s_N \otimes P) \circ (D \otimes \mu_D \otimes s_M \otimes N \otimes P) \\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\delta_D \circ \eta_D)) \otimes M \otimes N \otimes P) \\
&= (\varphi_M \otimes \varphi_N \otimes \varphi_P) \circ (D \otimes ((M \otimes \mu_D) \circ (s_M \otimes D)) \otimes N \otimes D \otimes P)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes(((s_M\circ s'_M)\otimes s_N\otimes P)\circ(M\otimes(\delta_D\circ\eta_D)\otimes N\otimes P)))\\
&=(\varphi_M\otimes(\varphi_N\circ(\mu_D\otimes N))\otimes\varphi_P)\circ(D\otimes s_M\otimes\mu_D\otimes s_N\otimes P)\\
&\quad\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes(s_M\circ(\eta_D\otimes M))\otimes(\delta_D\circ\eta_D)\otimes N\otimes P)\\
&=(\varphi_M\otimes(\varphi_N\circ(\mu_D\otimes N))\otimes\varphi_P)\circ(D\otimes(s_M\circ(\mu_D\otimes M))\otimes D\otimes s_N\otimes P)\\
&\quad\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes\eta_D\otimes M\otimes(\delta_D\circ\eta_D)\otimes N\otimes P)\\
&=(\varphi_M\otimes(\varphi_N\circ(D\otimes\varphi_N))\otimes\varphi_P)\circ(D\otimes s_M\otimes D\otimes s_N\otimes P)\\
&\quad\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes M\otimes(\delta_D\circ\eta_D)\otimes N\otimes P)\\
&=(\nabla_{M\otimes N}\otimes P)\circ(M\otimes\nabla_{N\otimes P}),
\end{aligned}
$$

donde las igualdades primera, segunda y última son consecuencia de las definiciones de $\nabla_{M\otimes N}$ y $\varphi_{N\otimes P}$, la tercera se sigue (b6) de la Definición 1.2.9, la cuarta de (e4-5) de la Definición 2.1.1 y (iii) de la Proposición 2.1.12. En la quinta igualdad se aplica (e3-4) de la Definición 2.1.1, en la sexta la asociatividad de μ_D y (e4-5) de la Definición 2.1.1; en la séptima las propiedades de η_D y la condición de D-módulo de N.

La fórmula

$$(M\otimes i_{N\otimes P})\circ\nabla_{M\otimes(N\times P)}\circ(M\otimes p_{N\otimes P})=(M\otimes\nabla_{N\otimes P})\circ(\nabla_{M\otimes N}\otimes P)$$

se demuestra análogamente utilizando (3.6) y (3.3). □

Lema 3.2.15. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Dados M, N, P y Q objetos en ${}_D^D\mathcal{YD}$, el morfismo*

$$\mathfrak{a}_{M,N,P}:M\times(N\times P)\to(M\times N)\times P$$

definido como

$$\mathfrak{a}_{M,N,P}=p_{(M\times N)\otimes P}\circ(p_{M\otimes N}\otimes P)\circ(M\otimes i_{N\otimes P})\circ i_{M\otimes(N\times P)} \tag{3.20}$$

es un isomorfismo natural en ${}_D^D\mathcal{YD}$.

Prueba:
El morfismo $\mathfrak{a}_{M,N,P}$ es de D-módulos por la izquierda:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{(M\times N)\times P}\circ(D\otimes \mathfrak{a}_{M,N,P})\\
&= p_{(M\times N)\otimes P}\circ\varphi_{M\times N\otimes P}\circ(D\otimes\nabla_{M\times N\otimes P})\circ(D\otimes((p_{M\otimes N}\otimes P)\\
&\quad\circ(M\otimes i_{N\otimes P})\circ i_{M\otimes N\times P}))\\
&= p_{(M\times N)\otimes P}\circ(p_{M\otimes N}\otimes P)\circ((\varphi_M\otimes\varphi_N)\circ(D\otimes s_M\otimes N)\\
&\quad\circ(\delta_D\otimes\nabla_{M\otimes N}))\otimes\varphi_P)\circ(D\otimes((M\otimes s_N)\circ(s_M\otimes N)\\
&\quad\circ(D\otimes\nabla_{M\otimes N}))\otimes P)\circ(\delta_D\otimes M\otimes i_{N\otimes P})\circ(D\otimes i_{M\otimes N\times P})\\
&= p_{(M\times N)\otimes P}\circ(p_{M\otimes N}\otimes P)\circ(\varphi_M\otimes\varphi_N\otimes\varphi_P)\circ(D\otimes((s_M\otimes s_N\otimes P)\\
&\quad\circ(D\otimes s_M\otimes i_{N\otimes P})))\circ(D\otimes\delta_D\otimes i_{M\otimes(N\times P)})\circ(\delta_D\otimes M\times(N\times P))\\
&= p_{(M\times N)\otimes P}\circ(p_{M\otimes N}\otimes P)\circ(\varphi_M\otimes\varphi_{N\otimes P})\circ(D\otimes s_M\otimes i_{N\otimes P})\\
&\quad\circ(\delta_D\otimes i_{M\otimes N\times P})\\
&= p_{(M\times N)\otimes P}\circ(p_{M\otimes N}\otimes P)\circ(M\otimes i_{N\otimes P})\circ\varphi_{M\otimes N\times P}\circ(D\otimes i_{M\otimes(N\times P)})\\
&= p_{(M\times N)\otimes P}\circ(p_{M\otimes N}\otimes P)\circ(M\otimes i_{N\otimes P})\circ\nabla_{M\otimes(N\times P)}\circ\varphi_{M\otimes N\times P}\\
&\quad\circ(D\otimes i_{M\otimes(N\times P)})\\
&= \mathfrak{a}_{M,N,P}\circ\varphi_{M\times(N\times P)}.
\end{aligned}
$$

En los cálculos anteriores, las igualdades primera y última se siguen por las definiciones de $\mathfrak{a}_{M,N,P}$, $\varphi_{(M\times N)\times P}$ y $\varphi_{M\times(N\times P)}$; en la segunda, quinta, y sexta se aplica (i) del Lema 3.2.9. La tercera igualdad hace uso del Lema 3.2.7 y la coasociatividad de δ_D, la cuarta se sigue de (e4-7) de la Definición 2.1.1.

Aplicando argumentos similares se prueba que el morfismo $\mathfrak{a}_{M,N,P}$ es de D-comódulos por la izquierda.

Se cumple también la condición (ii) de la Definición 3.1.3:

$$
\begin{aligned}
&r_{(M\times N)\times P}\circ(\mathfrak{a}_{M,N,P}\otimes D)\\
&= (D\otimes p_{(M\times N)\otimes P})\circ(r_{M\times N}\otimes P)\circ(M\times N\otimes r_P)\\
&\quad\circ((i_{M\times N\otimes P}\circ p_{M\times N\otimes P})\otimes D)\circ((p_{M\otimes N}\otimes P)\circ(M\otimes i_{N\otimes P})\circ i_{M\otimes N\times P})\otimes D)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (D \otimes (p_{(M\times N)\otimes P} \circ (p_{M\otimes N} \otimes P))) \circ (r_M \otimes N \otimes P) \\
&\quad \circ (M \otimes r_N \otimes P) \circ (p_{M\otimes N} \otimes r_P) \circ ((i_{M\times N\otimes P} \circ p_{M\times N\otimes P}) \otimes D) \\
&\quad \circ (((p_{M\otimes N} \otimes P) \circ (M \otimes i_{N\otimes P}) \circ i_{M\otimes N\times P}) \otimes D) \\
&= (D \otimes (p_{(M\times N)\otimes P} \circ (p_{M\otimes N} \otimes P))) \circ (r_M \otimes N \otimes P) \\
&\quad \circ (M \otimes r_N \otimes P) \circ (\nabla_{M\otimes N} \otimes r_P) \circ ((M \otimes i_{N\otimes P}) \circ i_{M\otimes N\times P}) \otimes D) \\
&= (D \otimes (p_{(M\times N)\otimes P} \circ (p_{M\otimes N} \otimes P))) \circ (r_M \otimes N \otimes P) \\
&\quad \circ (M \otimes r_N \otimes P) \circ (M \otimes N \otimes r_P) \circ ((M \otimes i_{N\otimes P}) \circ i_{M\otimes N\times P}) \otimes D) \\
&= (D \otimes (p_{(M\times N)\otimes P} \circ (p_{M\otimes N} \otimes P))) \circ (r_M \otimes \nabla_{N\otimes P}) \circ (M \otimes r_N \otimes P) \\
&\quad \circ (M \otimes N \otimes r_P) \circ ((M \otimes i_{N\otimes P}) \circ i_{M\otimes N\times P}) \otimes D) \\
&= (D \otimes (p_{(M\times N)\otimes P} \circ (p_{M\otimes N} \otimes P))) \circ (r_M \otimes i_{N\otimes P}) \circ (M \otimes r_{N\times P}) \\
&\quad \circ (i_{M\otimes N\times P} \otimes D) \\
&= (D \otimes (p_{(M\times N)\otimes P} \circ (p_{M\otimes N} \otimes P))) \circ (D \otimes M \otimes i_{N\otimes P}) \circ (D \otimes \nabla_{M\otimes N\times P}) \\
&\quad \circ (r_M \otimes N \times P) \circ (M \otimes r_{N\times P}) \circ (i_{M\otimes N\times P} \otimes D) \\
&= (D \otimes \mathfrak{a}_{M\times(N\times P)}) \circ r_{M\times(N\times P)},
\end{aligned}
$$

donde las igualdades primera, segunda y última se siguen de la definición de $\mathfrak{a}_{M,N,P}$, $r_{(M\times N)\times P}$, $\nabla_{M\times N\otimes P}$ y $\nabla_{M\otimes N\times P}$, la tercera de (3.18) y las propiedades de la escisión; las restantes igualdades son consecuencia de la aplicación del Lema 3.2.7. Estos mismos argumentos permiten concluir el resultado análogo para $s_{M\times(N\times P)}$.

El morfismo $\mathfrak{a}_{M,N,P}$ es un isomorfismo con inverso:

$$\mathfrak{a}^{-1}_{M,N,P} : (M \times N) \times P \to M \times (N \times P)$$

$$\mathfrak{a}^{-1}_{M,N,P} := p_{M\otimes(N\times P)} \circ (M \otimes p_{N\otimes P}) \circ (i_{M\otimes N} \otimes P) \circ i_{(M\times N)\otimes P}, \tag{3.21}$$

lo que se deduce usando (3.17) y las propiedades de la escisión.

El morfismo $\mathfrak{a}_{M,N,P}$ es natural, pues dados tres morfismos $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ y $h : P \to P'$ en ${}^D_D\mathcal{YD}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
&((f\times g)\times h)\circ \mathfrak{a}_{M,N,P}\\
&= p_{M'\times N'\otimes P'}\circ (p_{M'\otimes N'}\otimes P')\circ (f\otimes g\otimes h)\circ (i_{M\otimes N}\otimes P)\circ \nabla_{M\times N\otimes P}\\
&\quad \circ (p_{M\otimes N}\otimes P)\circ (M\otimes i_{N\otimes P})\circ i_{M\otimes N\times P}\\
&= p_{M'\times N'\otimes P'}\circ (p_{M'\otimes N'}\otimes P')\circ (f\otimes g\otimes h)\circ (M\otimes i_{N\otimes P})\circ \nabla_{M\otimes N\times P}\\
&\quad \circ (M\otimes p_{N\otimes N})\circ (M\otimes i_{N\otimes P})\circ i_{M\otimes N\times P}\\
&= p_{M'\times N'\otimes P'}\circ (p_{M'\otimes N'}\otimes P')\circ (f\otimes g\otimes h)\circ (M\otimes i_{N\otimes P})\circ i_{M\otimes N\times P}\\
&= p_{M'\times N'\otimes P'}\circ (p_{M'\otimes N'}\otimes P')\circ (i_{M'\otimes N'}\otimes P')\circ \nabla_{M'\times N'\otimes P'}\\
&\quad \circ (p_{M'\otimes N'}\otimes P')\circ (f\otimes g\otimes h)\circ (M\otimes i_{N\otimes P})\circ i_{M\otimes N\times P}\\
&= p_{M'\times N'\otimes P'}\circ (p_{M'\otimes N'}\otimes P')\circ (M'\otimes i_{N'\otimes P'})\circ \nabla_{M'\otimes N'\times P'}\circ (M'\otimes p_{N'\otimes P'})\\
&\quad \circ (f\otimes g\otimes h)\circ (M\otimes i_{N\otimes P})\circ i_{M\otimes N\times P}\\
&= \mathfrak{a}_{M',N',P'}\circ (f\times (g\times h)),
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la definición de $\mathfrak{a}_{M,N,N}$ y $(f\times g)\times h$, la tercera se obtiene por las propiedades de la escisión, la última por la Observación 3.2.2 y las restantes por (3.17). □

Lema 3.2.16. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Dados M, N, P y Q objetos en ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$, el morfismo $\mathfrak{a}_{M,N,P}$ definido en el Lema 3.2.15 satisface las igualdades siguientes:*

(i)
$$
\begin{aligned}
&(i_{M\otimes N}\otimes i_{P\otimes Q})\circ i_{M\times N\otimes P\times Q}\circ \mathfrak{a}_{M,N,P\times Q}\\
&= (M\otimes N\otimes i_{P\otimes Q})\circ (M\otimes i_{N\otimes P\times Q})\circ i_{M\otimes (N\times (P\times Q))},
\end{aligned}
$$

(ii)
$$
\begin{aligned}
&(i_{M\otimes N}\otimes P\otimes Q)\circ (i_{M\times N\otimes P}\otimes Q)\circ i_{(M\times N)\times P\otimes Q}\circ \mathfrak{a}_{M\times N,P,Q}\\
&= (i_{M\otimes N}\otimes i_{P\otimes Q})\circ i_{M\times N\otimes P\times Q},
\end{aligned}
$$

(iii)
$$
\begin{aligned}
&(M\otimes i_{N\otimes P}\otimes Q)\circ (i_{M\otimes N\times P}\otimes Q)\circ i_{M\times (N\times P)\otimes Q}\circ \mathfrak{a}_{M,N\times P,Q}\\
&= (M\otimes i_{N\otimes P}\otimes Q)\circ (M\otimes i_{N\times P\otimes Q})\circ i_{M\otimes (N\times P)\times Q},
\end{aligned}
$$

(iv) $(i_{N\otimes P}\otimes Q)\circ i_{N\times P\otimes Q}\circ \mathfrak{a}_{N,P,Q}=(N\otimes i_{P\otimes Q})\circ i_{N\otimes P\times Q}$,

(v)
$$\begin{aligned}&(i_{M\otimes N}\otimes P\otimes Q)\circ(i_{M\times N\otimes P}\otimes Q)\circ(i_{(M\times N)\times P\otimes Q})\circ(\mathfrak{a}_{M,N,P}\times Q)\\ &=(M\otimes i_{N\otimes P}\otimes Q)\circ(i_{M\otimes N\times P}\otimes Q)\circ(i_{M\times(N\times P)\otimes Q}),\end{aligned}$$

(vi) $i_{M\otimes(N\times P)\times Q}\circ(M\times \mathfrak{a}_{N,P,Q})=(M\otimes \mathfrak{a}_{N,P,Q})\circ i_{M\otimes N\times(P\times Q)}$.

Prueba:
La demostración de las cuatro primeras fórmulas consiste en aplicar (3.17) y posteriormente las propiedades de la escisión.

En efecto, para (i):

$$\begin{aligned}&(i_{M\otimes N}\otimes i_{P\otimes Q})\circ i_{M\times N\otimes P\times Q}\circ \mathfrak{a}_{M,N,P\times Q}\\ &=(i_{M\otimes N}\otimes i_{P\otimes Q})\circ i_{M\times N\otimes P\times Q}\circ p_{M\times N\otimes P\times Q}\circ(p_{M\otimes N}\otimes P\times Q)\\ &\quad\circ(M\otimes i_{N\otimes P\times Q})\circ i_{M\otimes N\times(P\times Q)}\\ &=(M\otimes N\otimes i_{P\otimes Q})\circ(M\otimes i_{N\otimes P\times Q})\circ\nabla_{M\otimes N\times(P\times Q)}\circ(M\otimes p_{N\otimes P\times Q})\\ &\quad\circ(M\otimes i_{N\otimes P\times Q})\circ i_{M\otimes N\times(P\times Q)}\\ &=(M\otimes N\otimes i_{P\otimes Q})\circ(M\otimes i_{N\otimes P\times Q})\circ i_{M\otimes(N\times(P\times Q))}.\end{aligned}$$

Las demostraciones de (v) y (vi) siguen un esquema similar, pero teniendo en cuenta además que, en virtud del Lema 3.2.15, $\mathfrak{a}_{M,N,P}$ es un morfismo en ${}_D^D\mathcal{YD}$ y puede entonces aplicarse la Observación 3.2.2. □

Lema 3.2.17. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y M un objeto en ${}_D^D\mathcal{YD}$. Entonces el morfismo*

$$\mathfrak{l}_M : D_L\times M\to M \tag{3.22}$$

definido como

$$\mathfrak{l}_M := \varphi_M\circ(i_L\otimes M)\circ i_{D_L\otimes M} \tag{3.23}$$

es un isomorfismo natural en la categoría ${}_D^D\mathcal{YD}$.

Prueba:
Probemos en primer lugar que el morfismo $\mathfrak{l}_M$ es de D-módulos por la izquierda. En efecto, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{l}_M \circ \varphi_{D_L \times M}\\
&= \varphi_M \circ (i_L \otimes M) \circ \nabla_{D_L \otimes M} \circ \varphi_{D_L \otimes M} \circ i_{D_L \otimes M}\\
&= \varphi_M \circ ((\Pi_D^L \circ \mu_D \circ (D \otimes \Pi_D^L)) \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes i_L \otimes M)\\
&\quad \circ (D \otimes i_{D_L \otimes M})\\
&= \varphi_M \circ ((\Pi_D^L \circ \mu_D) \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes i_L \otimes M) \circ (D \otimes i_{D_L \otimes M})\\
&= \varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes \varphi_M) \circ (\delta_D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes i_L \otimes M) \circ (D \otimes i_{D_L \otimes M})\\
&= \varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes D \otimes t_{D,D} \otimes M)\\
&\quad \circ (D \otimes \delta_D \otimes i_L \otimes M) \circ (\delta_D \otimes i_{D_L \otimes M})\\
&= \varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes (\mu_D \circ (D \otimes (\Pi_D^L \circ i_L))) \otimes M) \circ (\delta_D \otimes i_{D_L \otimes M})\\
&= \varphi_M \circ (\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (\Pi_D^L \otimes D \otimes i_L \otimes M) \circ (\delta_D \otimes i_{D_L \otimes M})\\
&= \varphi_M \circ (D \otimes \mathfrak{l}_M),
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue por la definición de $\mathfrak{l}_M$ y $\varphi_{D_L \times M}$, la segunda por el Lema 3.2.9 y la definición de $\varphi_{D_L \otimes M}$, la tercera por (1.52), la cuarta por el apartado (ii) del Lema 1.2.14. La quinta igualdad hace uso de la coasociatividad de δ_D y la sexta de (1.39). La séptima se sigue de la condición de módulo y las propiedades de la escisión de Π_D^L; finalmente la última es consecuencia de (1.30).

El morfismo $\mathfrak{l}_M$ es también un morfismo de D-comódulos por la izquierda ya que:

$$
\begin{aligned}
&(D \otimes \mathfrak{l}_M) \circ \varrho_{D_L \times M}\\
&= (D \otimes (\varphi_M \circ (i_L \otimes M) \circ \nabla_{D_L \otimes M})) \circ \varrho_{D_L \otimes M} \circ i_{D_L \otimes M}\\
&= (D \otimes (\varphi_M \circ (i_L \otimes M))) \circ \varrho_{D_L \otimes M} \circ i_{D_L \otimes M}\\
&= (\mu_D \otimes (\varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes M))) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (((D \otimes \Pi_D^L) \circ \delta_D \circ i_L) \otimes \varrho_M)\\
&\quad \circ i_{D_L \otimes M}
\end{aligned}
$$

$$= (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (\mu_D \otimes \Pi_D^L \otimes \varrho_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$

$$\circ((\delta_D \circ i_L) \otimes \varrho_M) \circ i_{D_L \otimes M}$$

$$= (((\mu_D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D)) \otimes M) \circ (i_L \otimes \varrho_M) \circ i_{D_L \otimes M}$$

$$= (((D \otimes \varepsilon_D) \circ \delta_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (i_L \otimes \varrho_M) \circ i_{D_L \otimes M}$$

$$= (\mu_D \otimes M) \circ ((\Pi_D^L \circ i_L) \otimes \varrho_M) \circ i_{D_L \otimes M}$$

$$= \varrho_M \circ \varphi_M \circ ((\Pi_D^L \circ i_L) \otimes D) \circ i_{D_L \otimes M}$$

$$= \varrho_M \circ \varphi_M \circ (i_L \otimes M) \circ i_{D_L \otimes M}$$

$$= \varrho_M \circ \mathfrak{l}_M,$$

donde las igualdades primera y última son consecuencia de las definiciones de $\mathfrak{l}_M$ y $\varrho_{D_L \times M}$, en la segunda se usa (ii) del Lema 3.2.9 y en la tercera (1.51) y (i) de la Observación 3.1.8. La cuarta igualdad se sigue de las propiedades de comódulo, (1.35) y (1.51), la quinta de (b4) de la Definición 1.2.9, la sexta de las propiedades de ε_D, la séptima y la novena de la definición de i_L; finalmente la octava igualdad es consecuencia del apartado (i) del Lema 3.1.7.

El morfismo $\mathfrak{l}_M$ satisface también la segunda condición de la Definición 3.1.3 ya que:

$$r_M \circ (\mathfrak{l}_M \otimes D)$$

$$= (D \otimes \varphi_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (i_L \otimes r_M) \circ (i_{D_L \otimes M} \otimes D)$$

$$= (D \otimes (\varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes M))) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (i_L \otimes r_M) \circ (i_{D_L \otimes M} \otimes D)$$

$$= (D \otimes (\varphi_M \circ (i_L \otimes M))) \circ (D \otimes \nabla_{D_L \otimes M}) \circ (r_{D_L} \otimes M) \circ (D_L \otimes r_M) \circ (i_{D_L \otimes M} \otimes D)$$

$$= (D \otimes \mathfrak{l}_M) \circ r_{D_L \times M},$$

donde la primera igualdad se sigue por la definición de $\mathfrak{l}_M$ y $r_{D_L \times M}$, y la compatibilidad del operador débil con la estructura de módulo, la segunda por la definición de i_L y (1.35); la tercera es consecuencia del Lema 3.2.7; la última igualdad es cierta por definición.

La demostración para el morfismo $s_{D_L\times M}$ es similar.

El morfismo

$$\mathfrak{l}_M^{-1} : M \to D_L \times M$$

definido como

$$\mathfrak{l}_M^{-1} := p_{D_L\otimes M} \circ (p_L \otimes \varphi_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \tag{3.24}$$

es el inverso de $\mathfrak{l}_M$. En efecto:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{l}_M^{-1} \circ \mathfrak{l}_M \\
&= p_{D_L\otimes M} \circ (p_L \otimes \varphi_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (\varphi_M \circ (i_L \otimes M) \circ i_{D_L\otimes M})) \\
&= p_{D_L\otimes M} \circ (p_L \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes \mu_D \otimes M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes ((i_L \otimes M) \circ i_{D_L\otimes M})) \\
&= p_{D_L\otimes M} \circ ((p_L \circ \overline{\Pi}_D^L) \otimes \varphi_M) \circ ((\delta_D \circ i_L) \otimes M) \circ i_{D_L\otimes M} \\
&= p_{D_L\otimes M} \circ (p_L \otimes (\varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes M))) \circ ((\delta_D \circ i_L) \otimes M) \circ i_{D_L\otimes M} \\
&= p_{D_L\otimes M} \circ ((p_L \circ \mu_D \circ (D \otimes \Pi_D^L)) \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes ((i_L \otimes M) \circ i_{D_L\otimes M}) \\
&= p_{D_L\otimes M} \circ \nabla_{D_L\otimes M} \circ i_{D_L\otimes M} \\
&= id_{D_L\times M},
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad y la sexta se cumplen por las definiciones de $\mathfrak{l}_M$, $\mathfrak{l}_M^{-1}$ y $\nabla_{D_L\otimes M}$, la segunda se deduce de la condición de módulo, la tercera de (1.45), en la cuarta se aplica (1.31) y (1.51), en la quinta (1.43) y (1.52); la última se obtiene gracias las propiedades de la escisión. Mediante argumentos análogos se prueba que $\mathfrak{l}_M \circ \mathfrak{l}_M^{-1} = id_M$.

Finalmente, es fácil probar que $\mathfrak{l}_M$ es natural. □

Lema 3.2.18. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y M un objeto en ${}_D^D\mathcal{YD}$. Entonces el morfismo*

$$\mathfrak{r}_M : M \times D_L \to M$$

definido como

$$\mathfrak{r}_M : \varphi_M \circ s'_M \circ (M \otimes (\overline{\Pi}_D{}^L \circ i_L)) \circ i_{M\otimes D_L} \tag{3.25}$$

es un isomorfismo natural en la categoría ${}_D^D\mathcal{YD}$.

Prueba:
Al igual que en el resultado anterior, probamos en primer lugar que $\mathfrak{r}_M$ es de D-módulos por la izquierda. En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{r}_M \circ \varphi_{M\times D_L}\\
&= \varphi_M \circ s'_M \circ (M \otimes (\overline{\Pi}_D^L \circ i_L)) \circ \nabla_{M\otimes D_L} \circ \varphi_{M\otimes D_L} \circ (D \otimes i_{M\otimes D_L})\\
&= \varphi_M \circ s'_M \circ (\varphi_M \otimes (\overline{\Pi}_D^L \circ \Pi_D^L \circ \mu_D)) \circ (D \otimes s_M \otimes i_L) \circ (\delta_D \otimes i_{M\otimes D_L})\\
&= \varphi_M \circ (D \otimes \varphi_M) \circ (t'_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes s'_M)\\
&\quad \circ (D \otimes M \otimes (\overline{\Pi}_D^L \circ \Pi_D^L) \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (D \otimes M \otimes \delta_D \otimes D)\\
&\quad \circ (D \otimes s_M \otimes i_L) \circ (\delta_D \otimes i_{M\otimes D_L})\\
&= \varphi_M \circ ((\mu_D \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes D)) \otimes M) \circ (t'_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes s'_M)\\
&\quad \circ (D \otimes s_M \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (D \otimes D \otimes s_M \otimes D) \circ (D \otimes \delta_D \otimes M \otimes i_L)\\
&\quad \circ (\delta_D \otimes i_{M\otimes D_L})\\
&= \varphi_M \circ ((\mu_D \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes D)) \otimes M) \circ (t'_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \nabla_{s_M})\\
&\quad \circ (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (\delta_D \otimes D \otimes s'_M) \circ (\delta_D \otimes ((M \otimes i_L) \circ i_{M\otimes D_L}))\\
&= \varphi_M \circ ((\mu_D \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes D)) \otimes M) \circ (t'_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \nabla_{s_M})\\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \overline{\Pi}_D^L)) \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (D \otimes ((M \otimes i_L) \circ i_{M\otimes D_L}))\\
&= \varphi_M \circ ((\mu_D \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes D) \circ t'_{D,D} \circ \delta_D \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes s'_M)\\
&\quad \circ (D \otimes ((M \otimes (\overline{\Pi}_D^L \circ i_L)) \circ i_{M\otimes D_L}))\\
&= \varphi_M \circ (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (D \otimes ((M \otimes (\overline{\Pi}_D^L \circ i_L)) \circ i_{M\otimes D_L}))
\end{aligned}$$

$$= \varphi_M \circ (D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (D \otimes ((M \otimes (\overline{\Pi}_D^L \circ i_L)) \circ i_{M\otimes D_L}))$$

$$= \varphi_M \circ (D \otimes \mathfrak{r}_M),$$

donde las igualdades primera y última se siguen de las definiciones de $\mathfrak{r}_M$ y $\varphi_{M\times D_L}$, la segunda de (i) del Lema 3.2.9 y la tercera de la compatibilidad del operador débil con la estructura de módulo de M y el apartado (ii) del Lema 1.2.14. En la cuarta igualdad se aplica (e4) de la Definición 2.1.1, (1.31), la Proposición 2.1.15, (1.36) y la condición de módulo; la quinta es cierta por la coasociatividad de δ_D y el apartado (ii) de la Proposición 2.1.12. La sexta es consecuencia de (1.41); la séptima se deduce por la Proposición 2.1.15 además de (2.8), (2.10) y la parte (ii) de la Proposición 2.1.5 para ∇_{s_M}. Finalmente, la novena igualdad es consecuencia de la condición de módulo de M y la octava de la fórmula

$$\mu_D \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes D) \circ t'_{D,D} \circ \delta_D = id_D, \tag{3.26}$$

siendo ésta cierta porque:

$$\mu_D \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes D) \circ t'_{D,D} \circ \delta_D$$

$$= \mu_D \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes D) \circ t'_{D,D} \circ \delta_D \circ \lambda_D \circ \lambda_D^{-1}$$

$$= \mu_D \circ ((\overline{\Pi}_D^L \circ \lambda_D) \otimes \lambda_D) \circ \delta_D \circ \lambda_D^{-1}$$

$$= \mu_D \circ (\Pi_D^R \otimes \lambda_D) \circ \delta_D \circ \lambda_D^{-1}$$

$$= \lambda_D \circ \lambda_D^{-1}$$

$$= id_D,$$

donde las igualdades primera y última se obtienen componiendo con la identidad, la segunda se sigue por antimultiplicatividad del antípodo, (1.2) y (b2-1) de la Definición 1.2.9. La tercera igualdad hace uso de (1.34), la cuarta de (1.29).

De modo análogo puede comprobarse que $\mathfrak{r}_M$ es de D-comódulos.

El morfismo $\mathfrak{r}_M$ es un isomorfismo con inverso

$$\mathfrak{r}_M^{-1} : M \to M \times D_L$$

definido como

$$\mathfrak{r}_M^{-1} =: p_{M\otimes D_L} \circ (\varphi_M \otimes p_L) \circ (D \otimes s_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M), \tag{3.27}$$

porque

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{r}_M^{-1} \circ \mathfrak{r}_M \\
&= p_{M\otimes D_L} \circ (\varphi_M \otimes p_L) \circ (D \otimes (s_M \circ (D \otimes (\varphi_M \circ s'_M)))) \\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (M \otimes (\overline{\Pi}_D^L \circ i_L) \circ i_{M\otimes D_L})) \\
&= p_{M\otimes D_L} \circ (\varphi_M \otimes p_L) \circ ((\mu_D \circ (D \otimes \overline{\Pi}_D^L)) \otimes s_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (s'_M \circ (M \otimes i_L) \circ i_{M\otimes D_L})) \\
&= p_{M\otimes D_L} \circ (\varphi_M \otimes p_L) \circ (D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes t_{D,D} \otimes M) \\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (s'_M \circ (M \otimes i_L) \circ i_{M\otimes D_L})) \\
&= p_{M\otimes D_L} \circ (\varphi_M \otimes p_L) \circ (D \otimes s_M) \circ (D \otimes (\mu_D \circ (D \otimes \Pi_D^L)) \otimes M) \\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes (s'_M \circ (M \otimes i_L) \circ i_{M\otimes D_L})) \\
&= p_{M\otimes D_L} \circ \nabla_{M\otimes D_L} \circ (M \otimes p_L) \circ \nabla_{s'_M} \circ (M \otimes i_L) \circ i_{M\otimes D_L} \\
&= p_{M\otimes D_L} \circ (\varphi_M \otimes (p_L \circ \mu_D \circ (D \otimes \Pi_D^L))) \circ (D \otimes s_M \otimes \mu_D) \\
&\quad \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes s_M \otimes i_L) \circ (\eta_D \otimes i_{M\otimes D_L}) \\
&= p_{M\otimes D_L} \circ (\varphi_M \otimes (p_L \circ \mu_D \circ (D \otimes i_L))) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \\
&\quad \circ (D \otimes \mu_D \otimes M \otimes D_L) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \eta_D \otimes i_{M\otimes D_L}) \\
&= \varphi_{M\times D_L} \circ (\eta_D \otimes M \times D_L) \\
&= id_{M\times D_L},
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es cierta por las definiciones de $\mathfrak{r}_M$ y $\mathfrak{r}_M^{-1}$, en la segunda se aplica la compatibilidad del operador débil con la estructura de módulo, la condición de módulo, la Proposición 2.1.15 y (1.38); en la tercera (1.41). La cuarta igualdad es consecuencia de la coasociatividad de δ_D y (1.39), la quinta de la Proposición 2.1.15, (e4) de la Definición 2.1.1 y de las definiciones de los morfismos $\nabla_{s'_M}$ y $\nabla_{M\otimes D_L}$. La sexta igualdad es cierta por (e3) de la Definición 2.1.1 y la definición de $\nabla_{M\otimes D_L}$, la séptima por (1.52), la asociatividad de μ_D y (e4) de la Definición 2.1.1. Finalmente, en la octava igualdad se aplica la definición de $\varphi_{M\times D_L}$ y las propiedades de η_D, en la novena la condición de D-módulo de $M \times D_L$. Con argumentos similares se obtiene que $\mathfrak{r}_M \circ \mathfrak{r}_M^{-1} = id_M$.

Igualmente es fácil comprobar que $\mathfrak{r}_M$ es un isomorfismo natural cumpliendo $r_M \circ (\mathfrak{r}_M \otimes D) = (D \otimes \mathfrak{r}_M) \circ r_{M\times D_L}$ y $s_M \circ (D \otimes \mathfrak{r}_M) = (\mathfrak{r}_M \otimes D) \circ s_{M\times D_L}$.
□

En este momento se dispone de todos los elementos necesarios para enunciar y probar el resultado principal del capítulo, explicitando la estructura monoidal de la categoría de módulos Yetter-Drinfeld.

Teorema 3.2.19. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Entonces ${}_D^D\mathcal{YD}$ es una categoría monoidal no estricta.*

Prueba:
Dados $(M\varphi_M, \varrho_M)$ y $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ dos objetos en ${}_D^D\mathcal{YD}$ se define su producto tensor como el objeto $M \times N$ imagen del idempotente $\nabla_{M\otimes N}$, el cual, en virtud de la Proposición 3.2.12, es un módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda con el operador débil asociado definido en la Proposición 3.2.11.

Dados $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ dos morfismos en ${}_D^D\mathcal{YD}$ su producto tensor se define mediante la composición:

$$f \times g = p_{M'\times N'} \circ (f \otimes g) \circ i_{M\otimes N} : M \times N \to M' \times N'. \tag{3.28}$$

Trivialmente, el morfismo $f \times g$ es de módulos y de comódulos y satisface la condición (ii) de la Definición 3.1.3, es decir, es un morfismo en ${}_D^D\mathcal{YD}$.

Al ser f y g morfismos de módulos, en virtud de la Observación 3.2.2 se cumple también:

$$(f' \times g') \circ (f \times g) = (f' \circ f) \times (g' \circ g). \tag{3.29}$$

El objeto base es el triple $(D_L, \varphi_{D_L}, \varrho_{D_L})$, que por la Proposición 3.2.13, es un objeto de la categoría.

Dados M, N, P objetos en ${}_D^D\mathcal{YD}$, se toma como isomorfismo natural de asociatividad el morfismo

$$\mathfrak{a}_{M,N,P} : M \times (N \times P) \to (M \times N) \times P \tag{3.30}$$

dado por

$$\mathfrak{a}_{M,N,P} = p_{(M\times N)\otimes P} \circ (p_{M\otimes N} \otimes P) \circ (M \otimes i_{N\otimes P}) \circ i_{M\otimes(N\times P)}, \tag{3.31}$$

siendo éste un isomorfismo natural en la categoría en virtud del Lema 3.2.15.

Como isomorfismos naturales de la unidad se toman los morfismos

$$\mathfrak{l}_M = \varphi_M \circ (i_L \otimes M) \circ i_{D_L\otimes M} : D_L \times M \to M, \tag{3.32}$$

$$\mathfrak{r}_M = \varphi_M \circ s'_M \circ (M \otimes (\overline{\Pi}_D{}^L \circ i_L)) \circ i_{M\otimes D_L} : M \times D_L \to M; \tag{3.33}$$

que en virtud de los Lemas 3.2.17 y 3.2.18 respectivamente son isomorfismos naturales en la categoría ${}_D^D\mathcal{YD}$.

Para finalizar la prueba del teorema, según lo establecido en la Definición 1.1.1 resta tan solo demostrar el axioma del pentágono y el del triángulo.

Para obtener el *axioma del pentágono*, puesto que la composición

$$(i_{M\otimes N} \otimes P \otimes Q) \circ (i_{M\times N\otimes P} \otimes Q) \circ i_{(M\times N)\times P\otimes Q} \tag{3.34}$$

es un monomorfismo, es suficiente con probar:

$$\begin{aligned} &(i_{M\otimes N} \otimes P \otimes Q) \circ (i_{M\times N\otimes P} \otimes Q) \circ i_{(M\times N)\times P\otimes Q} \\ &\circ(\mathfrak{a}_{M,N,P} \times Q) \circ \mathfrak{a}_{M,N\times P,Q} \circ (M \times \mathfrak{a}_{N,P,Q}) \\ =\ &(i_{M\otimes N} \otimes P \otimes Q) \circ (i_{M\times N\otimes P} \otimes Q) \circ i_{(M\times N)\times P\otimes Q} \\ &\circ\mathfrak{a}_{M\times N,P,Q} \circ \mathfrak{a}_{M,N,P\times Q}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Ahora bien, las igualdades (i) y (ii) del Lema 3.2.16 implican:

$$\begin{aligned} &(i_{M\otimes N} \otimes P \otimes Q) \circ (i_{M\times N\otimes P} \otimes Q) \circ i_{(M\times N)\times P\otimes Q} \\ &\circ\mathfrak{a}_{M\times N,P,Q} \circ \mathfrak{a}_{M,N,P\times Q} \\ =\ &(M \otimes N \otimes i_{P\otimes Q}) \circ (M \otimes i_{N\otimes P\times Q}) \circ i_{M\otimes N\times(P\times Q)}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Por otra parte, como consecuencia de las igualdades (v) y (iii) del Lema 3.2.16 se tiene:

$$\begin{aligned}&(i_{M\otimes N}\otimes P\otimes Q)\circ(i_{M\times N\otimes P}\otimes Q)\circ i_{(M\times N)\times P\otimes Q}\\&\mathfrak{a}_{M,N,P\times Q}\circ\mathfrak{a}_{M,N\times P,Q}\\=&(M\otimes i_{N\otimes P}\otimes Q)\circ(M\otimes i_{N\times P\otimes Q})\circ i_{M\otimes((N\times P)\times Q)},\end{aligned}\tag{3.37}$$

y en virtud de (vi) y (iv) del Lema 3.2.16 resulta:

$$\begin{aligned}&(M\otimes i_{N\otimes P}\otimes Q)\circ(i_{M\otimes((N\times P)\times Q)})\circ(M\times\mathfrak{a}_{N,P,Q})\\=&(M\otimes N\otimes i_{P\otimes Q})\circ(M\otimes i_{N\otimes P\times Q})\circ i_{M\otimes(N\times(P\times Q))}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Entonces, (3.37) y (3.38) permiten concluir:

$$\begin{aligned}&(i_{M\otimes N}\otimes P\otimes Q)\circ(i_{M\times N\otimes P}\otimes Q)\circ i_{(M\times N)\times P\otimes Q}\\&\circ\mathfrak{a}_{M,N,P\times Q}\circ\mathfrak{a}_{M\times N,P,Q}\circ(M\times\mathfrak{a}_{N,P,Q})\\=&(M\otimes N\otimes i_{P\otimes Q})\circ(M\otimes i_{N\otimes P\times Q})\circ i_{M\otimes N\times(P\times Q)}.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Combinando (3.36) y (3.39) resulta (3.35), quedando demostrado el axioma del pentágono.

Probaremos finalmente el axioma del triángulo. En primer lugar se tiene que

$$\nabla_{M\otimes N}\circ((\varphi_M\circ s'_M\circ(M\otimes(\overline{\Pi}_D^L\circ i_L)))\otimes N)=\nabla_{M\otimes N}\circ(M\otimes(\varphi_N\circ(i_L\otimes N))),\tag{3.40}$$

de donde por ser $i_{M\otimes N}$ un monomorfismo la fórmula (3.40) implica

$$p_{M\otimes N}\circ((\varphi_M\circ s'_M\circ(M\otimes(\overline{\Pi}_D^L\circ i_L)))\otimes N)=p_{M\otimes N}\circ(M\otimes(\varphi_N\circ(i_L\otimes N))),\tag{3.41}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{r}_M\times N)\circ\mathfrak{a}_{M,D_L,N}\\=&p_{M\otimes N}\circ((\varphi_M\circ s'_M\circ(M\otimes(\overline{\Pi}_D^L\circ i_L)))\otimes N)\circ(i_{M\otimes D_L}\otimes N)\\&\circ i_{M\times D_L\otimes N}\circ p_{M\times D_L\otimes N}\circ(p_{M\otimes D_L}\otimes N)\circ(M\otimes i_{D_L\otimes N})\circ i_{M\otimes D_L\times N}\end{aligned}$$

$$= p_{M\otimes N} \circ ((\varphi_M \circ s'_M \circ (M \otimes (\overline{\Pi}^L_D \circ i_L))) \otimes N) \circ (M \otimes i_{D_L\otimes N}) \circ \nabla_{M\otimes D_L \times N}$$
$$\circ (M \otimes (p_{D_L\otimes N} \circ i_{D_L\otimes N})) \circ i_{M\otimes D_L\times N}$$
$$= p_{M\otimes N} \circ ((\varphi_M \circ s'_M \circ (M \otimes (\overline{\Pi}^L_D \circ i_L))) \otimes N) \circ (M \otimes i_{D_L\otimes N}) \circ i_{M\otimes D_L\times N}$$
$$= p_{M\otimes N} \circ (M \otimes (\varphi_N \circ (i_L \otimes N))) \circ (M \otimes i_{D_L\otimes N}) \circ i_{M\otimes D_L\times N}$$
$$= M \times \mathfrak{l}_M,$$

siendo las igualdades primera y última ciertas por la definición de $\mathfrak{r}_M$, $\mathfrak{l}_M$ y $\mathfrak{a}_{M,D_L,N}$, la segunda consecuencia de la fórmula (3.17) probada en el Lema 3.2.14, la tercera el resultado de aplicar las propiedades de la escisión y la cuarta (3.41). □

3.3. Acciones adjuntas y módulos Yetter-Drinfeld

En la teoría de álgebras de Hopf, constituye un resultado clásico el hecho de que cuando H es un álgebra de Hopf en una categoría trenzada estricta con trenza c, el triple (H, φ_H, δ_H) es un objeto de la categoría de módulos Yetter-Drinfeld ${}^H_H\mathcal{YD}$, donde $\varphi_H : H \otimes H \to H$ denota la acción adjunta dada por
$$\varphi_H = \mu_H \circ (\mu_H \otimes \lambda_H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes H).$$
Se cumple también el resultado análogo que surge al intercambiar los roles de las estructuras de álgebra y coálgebra y módulo y comódulo respectivamente entre sí. En concreto, el triple (H, μ_H, ϱ_H) es un objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$ donde $\varrho_H : H \to H \otimes H$ denota la coacción adjunta definida como

$$\varrho_H = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H.$$

Sin embargo, al pasar al contexto débil las afirmaciones anteriores no son necesariamente ciertas. De hecho, cuando H es un álgebra de Hopf débil en una categoría trenzada $\mathcal{C}$, el par (H, φ_H) no es en general un H-módulo por la izquierda porque puede no cumplirse la condición de la unidad, es decir:

$$\varphi_H \circ (\eta_H \otimes H) \neq id_H,$$

y en el caso de la coacción adjunta puede ser falsa la condición de la unidad pues

$$(\varepsilon_H \otimes H) \circ \varrho_H \neq id_H.$$

En esta sección se demuestra que para un AHTD D la acción adjunta y la coacción adjunta inducen morfismos idempotentes y usando sus respectivas factorizaciones es posible construir ejemplos de objetos en la categoría ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$ definida en la primera sección del capítulo. Obviamente, si H es un álgebra de Hopf, los idempotentes asociados a la acción adjunta y la coacción adjunta son identidades, recuperándose los resultados clásicos.

Proposición 3.3.1. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Sean $\varphi_D : D \otimes D \to D$ y $\varrho_D : D \to D \otimes D$ los morfismos definidos por*

$$\varphi_D = \mu_D \circ (\mu_D \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D)$$

y

$$\varrho_D = (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes \lambda_D) \circ \delta_D.$$

Entonces

$$\omega_D^a = \varphi_D \circ (\eta_D \otimes D) : D \to D, \tag{3.42}$$

y

$$\omega_D^c = (\varepsilon_D \otimes D) \circ \varrho_D : D \to D \tag{3.43}$$

son morfismos idempotentes en $\mathcal{C}$ tales que

$$\omega_D^a = \mu_D \circ (D \otimes (\lambda_D \circ \Pi_D^L)) \circ \delta_D, \tag{3.44}$$

$$\omega_D^c = \mu_D \circ (D \otimes (\Pi_D^L \circ \lambda_D)) \circ \delta_D. \tag{3.45}$$

Prueba:
Probemos en primer lugar que ω_D^a es un morfismo idempotente. En efecto:

$$\omega_D^a \circ \omega_D^a$$

$$= \mu_D \circ (\mu_D \otimes (\mu_D \circ t_{D,D} \circ (\lambda_D \otimes \lambda_D))) \circ (D \otimes \mu_D \otimes D \otimes D)$$

$$\circ (D \otimes D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes \delta_D \otimes D) \circ (\eta_D \otimes \eta_D \otimes D)$$

$$= \mu_D \circ (\mu_D \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (((\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D)) \otimes D)$$

$$
\begin{aligned}
&\circ(\eta_D \otimes \eta_D \otimes D) \\
&= \mu_D \circ (\mu_D \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \mu_D) \otimes D) \circ (\eta_D \otimes \eta_D \otimes D) \\
&= \omega_D^a,
\end{aligned}
$$

donde primera igualdad es consecuencia de (b3-2) de la Definición 1.2.9, la asociatividad de μ_D y (1.54). La segunda igualdad se sigue de la antimultiplicatividad del antípodo y (b3-1) de la Definición 1.2.9. La tercera igualdad hace uso de (b4) de la Definición 1.2.9 y la cuarta de las propiedades de η_D.

En cuanto a la condición de idempotente para ω_D^c, ésta se prueba siguiendo la misma estrategia pero intercambiando los papeles de las propiedades de álgebras y coálgebras.

Las igualdades

$$\omega_D^a = \mu_D \circ (D \otimes (\lambda_D \circ {\Pi_D}^L)) \circ \delta_D$$

y

$$\omega_D^c = \mu_D \circ (D \otimes ({\Pi_D}^L \circ \lambda_D)) \circ \delta_D$$

son consecuencia de (1.43) y (1.39) respectivamente. □

A continuación veremos la forma concreta que toman los morfismos ω_D^a y ω_D^c en algunos ejemplos:

Ejemplos 3.3.2. (1) Sea G un grupoide finito y tomemos $H = RG$. En este contexto los morfismos definidos en la Proposición 3.3.1 son:

$$\omega_{RG}^a(\sigma) = \sigma \circ id_{t(\sigma)} = \begin{cases} \sigma \ \text{ si } \ t(\sigma) = s(\sigma) \\ \\ 0 \ \text{ si } \ t(\sigma) \neq s(\sigma) \end{cases}$$

y

$$\omega_{RG}^c(\sigma) = \sigma \circ id_{s(\sigma)} = \sigma.$$

En el caso particular del álgebra de grupoide donde G_0 es un conjunto de n objetos con una aplicación inversible entre cada par ordenado de objetos, el álgebra RG resulta isomorfa al espacio de $n \times n$-matrices sobre el anillo base, esto es, $RG = M_n(R)$, pues cada matriz (i, j)-unidad representa la única aplicación existente en la categoría, que además es un isomorfismo con dominio el objeto j y codominio el objeto i.

El álgebra de Hopf débil RG tiene la siguiente estructura: Si E_{ij} denota la matriz (i,j)-unidad, la counidad viene dada por $\varepsilon_{RG}(E_{ij}) = 1$, la comultiplicación definida por $\delta_{RG}(E_{ij}) = E_{ij} \otimes E_{ij}$ y el antípodo $\lambda_{RG}(E_{ij}) = E_{ji}$ para cada $i, j = 1, \cdots, n$. En este caso se tiene que $\Pi^L_{RG}(E_{ij}) = E_{ii}$, $\Pi^R_{RG}(E_{ij}) = E_{jj}$; y entonces $RG_L = RG_R$ es el submódulo de las matrices diagonales. Entonces la imagen de ω^a_{RG} es RG_L, pues por definición

$$\omega^a_{RG}(E_{ij}) = \mu_{RG}(E_{ij}E_{ii}) = E_{ij}E_{ii} = \begin{cases} E_{ii} \text{ si } i = j \\ \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(2) En el contexto general, si D es un AHTD conmutativa ($\mu_D = \mu_D \circ t_{D,D}$) en virtud de (1.27) resulta $\Pi^L_D = \overline{\Pi}^R_D$. Entonces, la caracterización dada en (3.44), permite concluir, usando las igualdades (1.34) y (1.30):

$$\begin{aligned} &\omega^a_D \\ &= \mu_D \circ (D \otimes (\lambda_D \circ \overline{\Pi}^R_D)) \circ \delta_D \\ &= \mu_D \circ (D \otimes \Pi^R_D)) \circ \delta_D \\ &= id_D. \end{aligned}$$

Además gracias a (3.45) y (1.34) obtenemos que

$$\begin{aligned} &\omega_D{}^c \\ &= \mu_D \circ (D \otimes (\overline{\Pi}^R_D \circ \lambda_D)) \circ \delta_D \\ &= \mu_D \circ (D \otimes \Pi^L_D) \circ \delta_D. \end{aligned}$$

De forma análoga, si D es un AHTD coconmutativa ($\delta_D = t_{D,D} \circ \delta_D$), resulta $\omega^a_D = \mu_D \circ (D \otimes \Pi_D{}^L) \circ \delta_D$ y $\omega_D{}^c = id_D$ pues en este caso la fórmula (1.28) implica que $\Pi^L_D = \overline{\Pi}^L_D$.

(3) Sea $A = (A, \eta_A, \mu_A, \varepsilon_A, \delta_A)$ un álgebra de Frobenius separable en una categoría monoidal trenzada estricta $\mathcal{C}$ con trenza c. Entonces la condición de

separabilidad $\mu_A \circ \delta_A = id_A$ permite concluir que $A \otimes A$ es un álgebra de Hopf débil en $\mathcal{C}$ con estructura:

$$\eta_{A\otimes A} = \eta_A \otimes \eta_A, \quad \mu_{A\otimes A} = ((\mu_A \circ c_{A,A}) \otimes \mu_A) \circ (A \otimes c_{A,A} \otimes A),$$

$$\varepsilon_{A\otimes A} = \varepsilon_A \circ \mu_A, \quad \delta_{A\otimes A} = A \otimes (\delta_A \circ \eta_A) \otimes A,$$

$$\lambda_{A\otimes A} = (\varepsilon_{A\otimes A} \otimes A \otimes A) \circ (A \otimes c_{A,A} \otimes A) \circ ((\delta_A \circ \eta_A) \otimes c_{A,A}).$$

Para $A \otimes A$ se tiene

$$\Pi^L_{A\otimes A} = ((\mu_A \circ c_{A,A}) \otimes \eta_A) \circ (A \otimes (((\varepsilon_A \circ \mu_A) \otimes A) \circ (A \otimes c_{A,A}) \circ ((\delta_D \circ \eta_A) \otimes A)),$$

pues por la naturalidad de la trenza, (b3-2) de la Definición 1.2.9 y la condición de separabilidad resulta:

$$\begin{aligned}
&\Pi^L_{A\otimes A}\\
&= \mu_{A\otimes A} \circ (A \otimes A \otimes \lambda_{A\otimes A}) \circ \delta_{A\otimes A}\\
&= ((\mu_A \circ c_{A,A}) \otimes \mu_A) \circ (A \otimes c_{A,A} \otimes A) \circ (A \otimes A \otimes (((\varepsilon_A \circ \mu_A) \otimes A)\\
&\quad \circ (A \otimes c_{A,A}) \circ ((\delta_D \circ \eta_A) \otimes A)) \otimes A) \circ (A \otimes A \otimes c_{A,A}) \circ (A \otimes (\delta_A \circ \eta_A) \otimes A)\\
&= ((\mu_A \circ c_{A,A}) \otimes \mu_A) \circ (A \otimes c_{A,A} \otimes A) \circ (A \otimes A \otimes c_{A,A})\\
&\quad \circ (A \otimes (\delta_D \otimes \eta_A) \otimes (((\varepsilon_A \circ \mu_A) \otimes A) \circ (A \otimes c_{A,A}) \circ ((\delta_D \circ \eta_A) \otimes A)))\\
&= ((\mu_A \circ c_{A,A}) \otimes A) \circ (A \otimes c_{A,A})\\
&\quad \circ (A \otimes (\mu_A \circ \delta_A \circ \eta_A) \otimes (((\varepsilon_A \circ \mu_A) \otimes A) \circ (A \otimes c_{A,A}) \circ ((\delta_D \circ \eta_A) \otimes A)))\\
&= ((\mu_A \circ c_{A,A}) \otimes A) \circ (A \otimes c_{A,A})\\
&\quad \circ (A \otimes \eta_A \otimes (((\varepsilon_A \circ \mu_A) \otimes A) \circ (A \otimes c_{A,A}) \circ ((\delta_D \circ \eta_A) \otimes A)))\\
&= ((\mu_A \circ c_{A,A}) \otimes \eta_A) \circ (A \otimes (((\varepsilon_A \circ \mu_A) \otimes A) \circ (A \otimes c_{A,A}) \circ ((\delta_D \circ \eta_A) \otimes A))),
\end{aligned}$$

y entonces:

$$\omega^a_{A\otimes A} = (A \otimes (\mu_A \circ (\mu_A \otimes A) \circ (A \otimes c_{A,A}) \circ ((\delta_A \circ \eta_A) \otimes A))),$$

$$\begin{aligned}\omega^c_{A\otimes A} = {} & ((\varepsilon_A \circ \mu_A) \otimes (\mu_A \circ c_{A,A}) \otimes A) \circ (A \otimes c^{-1}_{A,A} \otimes c_{A,A}) \circ (c^{-1}_{A,A} \otimes c_{A,A} \otimes A)\\
& \circ (A \otimes (\delta_A \circ \eta_A) \otimes (c^{-1}_{A,A} \circ \delta_A)).\end{aligned}$$

Proposición 3.3.3. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Sean $\varphi_D : D\otimes D \to D$ y $\varrho_D : D \to D\otimes D$ los morfismos definidos en la Proposición 3.3.1. Se cumple lo siguiente:*

(i) $t_{D,D}\circ(\varphi_D\otimes D) = (D\otimes\varphi_D)\circ(t_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes t_{D,D})$,

(ii) $t_{D,D}\circ(D\otimes\varphi_D) = (\varphi_D\otimes D)\circ(D\otimes t_{D,D})\circ(t_{D,D}\otimes D)$,

(iii) $(D\otimes\varrho_D)\circ t_{D,D} = (t_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes t_{D,D})\circ(\varrho_D\otimes D)$,

(iv) $(\varrho_D\otimes D)\circ t_{D,D} = (D\otimes t_{D,D})\circ(t_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes\varrho_D)$,

y se tienen las igualdades análogas cambiando $t_{D,D}$ por $t'_{D,D}$.

Prueba:
Demostraremos (i) ya que las otras igualdades se obtienen de modo similar, bien aplicando las correspondientes propiedades por el otro lado, bien intercambiando entre sí los roles de las propiedades de álgebra y coálgebra. En efecto:

$$
\begin{aligned}
& t_{D,D}\circ(\varphi_D\otimes D)\\
&= t_{D,D}\circ\mu_D\circ(\mu_D\otimes\lambda_D\otimes D)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes D)\circ(\delta_D\otimes D\otimes D)\\
&= (D\otimes\mu_D)\circ(t_{D,D}\otimes\mu_D)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes\lambda_D)\circ(D\otimes((D\otimes t_{D,D})\\
&\quad \circ(t_{D,D}\otimes D)))\circ(\delta_D\otimes D\otimes D)\\
&= (D\otimes\mu_D)\circ(D\otimes D\otimes(\mu_D\circ(D\otimes\lambda_D)))\circ(t_{D,D}\otimes t_{D,D})\\
&\quad \circ(D\otimes t_{D,D}\otimes D)\circ(\delta_D\otimes t_{D,D})\\
&= (D\otimes\varphi_D)\circ(t_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes t_{D,D}),
\end{aligned}
$$

siendo la primera igualdad cierta por la definición de φ_D y la asociatividad de μ_D, la segunda por (b3-1) de la Definición 1.2.9 y (1.54), la tercera por (a1) de la Definición 1.2.4 y la cuarta por (b3-4) de la Definición 1.2.9 y la definición de φ_D. □

Proposición 3.3.4. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Sean $\varphi_D : D \otimes D \to D$ y $\varrho_D : D \to D \otimes D$ los morfismos definidos en la Proposición 3.3.1. Se cumple que:*

(i) $\varphi_D \circ (D \otimes \varphi_D) = \varphi_D \circ (\mu_D \otimes D)$,

(ii) $$\delta_D \circ \varphi_D = (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D),$$

(iii) $(D \otimes \varrho_D) \circ \varrho_D = (\delta_D \otimes D) \circ \varrho_D$,

(iv) $$\varrho_D \circ \mu_D = (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (((\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \varrho_D)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D).$$

Prueba:
Probaremos en primer lugar el apartado (i). En efecto:

$$\begin{aligned}
&\varphi_D \circ (D \otimes \varphi_D) \\
&= \mu_D \circ (\mu_D \otimes (\mu_D \circ t_{D,D} \circ (\lambda_D \otimes \lambda_D))) \circ (\mu_D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes t_{D,D}) \\
&\quad \circ (\delta_D \otimes \delta_D \otimes D) \\
&= \mu_D \circ (\mu_D \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (((\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D)) \otimes D) \\
&= \mu_D \circ (\mu_D \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \mu_D) \otimes D) \\
&= \varphi_D \circ (\mu_D \otimes D),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue de (b3-2) de la Definición 1.2.9, la asociatividad de μ_D y (1.53). La segunda igualdad es cierta por la antimultiplicatividad del antípodo y (b3-1) de la Definición 1.2.9; en la tercera igualdad se hace uso de (b4) de la Definición 1.2.9y en la cuarta de la definición de φ_D.

El apartado (ii) puede demostrarse como sigue:

$$\begin{aligned}
&(\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
&\circ (\delta_D \otimes \delta_D)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D) \\
&= (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (D \otimes (\mu_D \circ (\mu_D \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D})) \otimes D)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\circ(\mu_D \otimes \delta_D \otimes D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D \otimes \lambda_D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D \otimes D) \\
&\circ(D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D) \\
&= (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\mu_D \otimes \mu_D \otimes (t_{D,D} \circ (\lambda_D \otimes \lambda_D))) \\
&\circ(D \otimes t_{D,D} \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes D \otimes t_{D,D} \otimes D \otimes D) \\
&\circ(D \otimes \delta_D \otimes \delta_D \otimes D) \circ (\delta_D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D) \\
&= (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\mu_D \otimes \mu_D \otimes (t_{D,D} \circ (\lambda_D \otimes \lambda_D))) \\
&\circ(D \otimes t_{D,D} \otimes D \otimes D \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D \otimes D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
&\circ(D \otimes D \otimes t_{D,D}) \circ (D \otimes \delta_D \otimes D) \circ (\delta_D \otimes D) \\
&= (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (((\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
&\circ(\delta_D \otimes \delta_D)) \otimes (t_{D,D} \circ (\lambda_D \otimes \lambda_D) \circ \delta_D)) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D) \\
&= (\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \mu_D) \otimes (\delta_D \circ \lambda_D)) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D) \\
&= \delta_D \circ \varphi_D.
\end{aligned}
$$

En estos últimos cálculos la primera igualdad es cierta por la definición de φ_D; en la segunda se aplica (b3-1) y (b3-3) de la Definición 1.2.9, en la tercera (b3-4) y la coasociatividad de δ_D, en la cuarta (b3-3). La quinta igualdad es consecuencia de (1.53), (1.54), la anticomultiplicatividad del antípodo y (b4), la sexta se sigue de (b4) de la Definición 1.2.9 y la definición de φ_D.

La demostración del apartado (iii) es análoga a la de (i) pero aplicando las correspondientes propiedades de la estructura de comódulo en vez de la de módulo e intercambiando las propiedades de álgebra y coálgebra. Existe la misma relación entre las pruebas de (iv) y (ii). $\square$

Proposición 3.3.5. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Sean ω_D^a y ω_D^c los morfismos idempotentes definidos en la Proposición 3.3.1. Se cumple que:*

(i) $\varphi_D \circ (D \otimes \omega_D^a) = \varphi_D$,

(ii) $\omega_D^a \circ \varphi_D = \varphi_D$,

(iii) $(D \otimes \omega_D^a) \circ \delta_D \circ \omega_D^a = \delta_D \circ \omega_D^a$,

(iv) $(D \otimes \omega_D^c) \circ \varrho_D = \varrho_D$,

(v) $\varrho_D \circ \omega_D^c = \varrho_D$,

(vi) $\omega_D^c \circ \mu_D \circ (D \otimes \omega_D^c) = \omega_D^c \circ \mu_D$.

Prueba:
La igualdad (i) tiene la siguiente prueba:

$$\varphi_D \circ (D \otimes \omega_D^a) = \varphi_D \circ (D \otimes (\varphi_D \circ (\eta_D \otimes D))) = \varphi_D \circ ((\mu_D \circ (D \otimes \eta_D)) \otimes D) = \varphi_D,$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la definición de ω_D^a, en la segunda se aplica el apartado (i) de la Proposición 3.3.4 y la última se sigue por las propiedades de η_D.

La igualdad (ii) se obtiene por los mismos argumentos que la anterior:

$$\omega_D^a \circ \varphi_D = \varphi_D \circ (\eta_D \otimes \varphi_D) = \varphi_D \circ ((\mu_D \circ (\eta_D \otimes D)) \otimes D) = \varphi_D.$$

Para demostrar (iii), en primer lugar por el apartado (i) de la Proposición 3.3.3 y el apartado (ii) de la presente Proposición resulta:

$$(D \otimes \omega_D^a) \circ t_{D,D} \circ (\varphi_D \otimes D) = t_{D,D} \circ (\varphi_D \otimes D). \tag{3.46}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
&(D \otimes \omega_D^a) \circ \delta_D \circ \omega_D^a \\
&= (D \otimes \omega_D^a) \circ (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
&\quad \circ (\delta_D \otimes \delta_D)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D) \\
&= (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
&\quad \circ (\delta_D \otimes \delta_D)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes D) \\
&= \delta_D \circ \omega_D^a,
\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad se obtiene usando la definición de ω_D^a y (ii) de la Proposición 3.3.4. La segunda igualdad es consecuencia de (3.46) y la tercera de la parte (ii) de la Proposición 3.3.4 de nuevo.

En lo que respecta a los apartados restantes, intercambiando los roles de las propiedades de álgebra y coálgebra entre sí, así como las de módulo y comódulo, razonando de modo similar a lo realizado en (i), se obtiene (iv), dándose la misma relación entre (v) y (ii) y (vii) y (iii) respectivamente. □

Se introduce ahora una notación que resultará apropiada en lo que resta de sección.

3.3.6. Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Sean ω_D^a y ω_D^c los morfismos idempotentes definidos en la Proposición 3.3.1.

Para $x \in \{a, c\}$, se designará respectivamente por

$$\Omega^x(D), \qquad p_D^x : D \to \Omega^x(D), \qquad i_D^x : \Omega^x(D) \to D,$$

el objeto imagen de ω_D^x y los morfismos que surgen de la escisión de ω_D^x:

$$\omega_D^x = i_D^x \circ p_D^x, \qquad id_{\Omega^x(D)} = p_D^x \circ i_D^x.$$

Proposición 3.3.7. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Se cumple que:*

(i) El objeto $\Omega^a(D)$ es un D-módulo por la izquierda con acción

$$\varphi_{\Omega^a(D)} = p_D^a \circ \varphi_D \circ (D \otimes i_D^a) : D \otimes \Omega^a(D) \to \Omega^a(D)$$

y un D-comódulo por la izquierda con coacción

$$\rho_{\Omega^a(D)} = (D \otimes p_D^a) \circ \delta_D \circ i_D^a : \Omega^a(D) \to D \otimes \Omega^a(D).$$

(ii) El objeto $\Omega^c(D)$ es un D-módulo por la izquierda con acción

$$\psi_{\Omega^c(D)} = p_D^c \circ \mu_D \circ (D \otimes i_D^c) : D \otimes \Omega^c(D) \to \Omega^c(D)$$

y un D-comódulo por la izquierda con coacción

$$\varrho_{\Omega^c(D)} = (D \otimes p_D^c) \circ \varrho_D \circ i_D^c : \Omega^c(D) \to D \otimes \Omega^c(D).$$

Prueba:
Para demostrar el apartado (i) nótese en primer lugar que

$$\varphi_{\Omega^a(D)} \circ (\eta_D \otimes \Omega^a(D)) = p_D^a \circ \omega_D^a \circ i_D^a = id_{\Omega^a(D)}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\Omega^a(D)} \circ (D \otimes \varphi_{\Omega^a(D)}) \\
&= p_D^a \circ \varphi_D \circ (D \otimes \omega_D^a) \circ (D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes D \otimes i_D^a) \\
&= p_D^a \circ \varphi_D \circ (D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes D \otimes i_D^a) \\
&= p_D^a \circ \varphi_D \circ (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes D \otimes i_D^a) \\
&= \varphi_{\Omega^a(D)} \circ (\mu_D \otimes \Omega^a(D)),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad y la última se siguen por la definición de $\varphi_{\Omega^a(D)}$, la segunda por el apartado (ii) de la Proposición 3.3.5 y la tercera por la parte (i) de la Proposición 3.3.4.

Para demostrar que el par $(\Omega^a(D), \rho_{\Omega^a(D)})$ es una estructura de D-comódulo, por una parte, usando la definición de $\rho_{\Omega^a(D)}$ y las propiedades de ε_D se concluye que $(\varepsilon_D \otimes \Omega^a(D)) \circ \rho_{\Omega^a(D)} = id_{\Omega^a(D)}$.

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
&(D \otimes \rho_{\Omega^a(D)}) \circ \rho_{\Omega^a(D)} \\
&= (D \otimes ((D \otimes p_D^a) \circ \delta_D)) \circ (D \otimes \omega_D^a) \circ \delta_D \circ i_D^a \\
&= (D \otimes ((D \otimes p_D^a) \circ \delta_D)) \circ \delta_D \circ i_D^a \\
&= (\delta_D \otimes \Omega^a(D)) \circ \rho_{\Omega^a(D)},
\end{aligned}$$

siendo la primera igualdad cierta por la definición de $\rho_{\Omega^a(D)}$, la segunda por el apartado (iii) de la Proposición 3.3.5 y el carácter mónico de i_D^a; la tercera por la coasociatividad de δ_D.

La parte (ii) de la proposición se demuestra siguiendo el mismo esquema que en (i) pero intercambiando los roles entre las propiedades de álgebra y coálgebra y las relativas a módulo y comódulo. □

Lema 3.3.8. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Con la notación del párrafo 3.3.6, para $x=a$ o $x=c$ se cumple que:*

(i) $t_{D,D}\circ(\omega_D^x\otimes D)=(D\otimes\omega_D^x)\circ t_{D,D}, \quad t_{D,D}\circ(D\otimes\omega_D^x)=(\omega_D^x\otimes D)\circ t_{D,D},$

(ii) $t'_{D,D}\circ(\omega_D^x\otimes D)=(D\otimes\omega_D^x)\circ t'_{D,D}, \quad t'_{D,D}\circ(D\otimes\omega_D^x)=(\omega_D^x\otimes D)\circ t'_{D,D},$

(iii) $\nabla_{D,D}\circ(\omega_D^x\otimes D)=(\omega_D^x\otimes D)\circ\nabla_{D,D},$

(iv) $\nabla_{D,D}\circ(D\otimes\omega_D^x)=(D\otimes\omega_D^x)\circ\nabla_{D,D}.$

Prueba:
Si con $\Pi(\lambda)^a$ designamos a $\Pi_D^L\circ\lambda_D$ y con $\Pi(\lambda)^c$ a $\lambda_D\circ\Pi_D^L$, entonces las fórmulas (3.44) y (3.45) permiten escribir $\omega_D^x=\mu_D\circ(D\otimes\Pi(\lambda)^x)\circ\delta_D$ para $x\in\{a,c\}$. Aplicando (1.54) y (1.35) resulta:

$$(\Pi(\lambda)^x\otimes D)\circ t_{D,D}=t_{D,D}\circ(D\otimes\Pi(\lambda)^x). \tag{3.47}$$

Entonces, por (b3) de la Definición 1.2.9 y (3.47) se obtiene:

$$\begin{aligned}
&t_{D,D}\circ(\omega_D^x\otimes D)\\
&=t_{D,D}\circ((\mu_D\circ(D\otimes\imath)\circ\delta_D)\otimes D)\\
&=(D\otimes\mu_D)\circ(t_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes t_{D,D})\circ(D\otimes\Pi(\lambda)^x\otimes D)\circ(\delta_D\otimes D)\\
&=(D\otimes(\mu_D\circ(D\otimes\Pi(\lambda)^x)\circ\delta_D))\circ t_{D,D}\\
&=(D\otimes\omega_D^x)\circ t_{D,D}.
\end{aligned}$$

La otra fórmula incluída en (i) se deduce análogamente, y las enunciadas en (ii), (iii) y (iv) son ciertas porque cuando D es una BTD o un AHTD con operador Yang-Baxter débil asociado $t_{D,D}$ en $\mathcal{C}$ entonces la cuádrupla $(t_{D,D},t'_{D,D},t_{D,D},t'_{D,D})$ es un caso particular de (D,D)-OD. Por lo tanto, las fórmulas se obtienen a partir del Lema 2.1.20. □

Observación 3.3.9. Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Utilizando el Lema 3.3.8 obtenemos que se satisfacen las hipótesis del Lema 2.1.21 y esto implica que la cuádrupla

$$(r_{\Omega^x(D)},r'_{\Omega^x(D)},s_{\Omega^x(D)},s'_{\Omega^x(D)})$$

con

$$r_{\Omega^x(D)} := (D\otimes p_D^x)\circ t_{D,D}\circ(i_D^x\otimes D), \quad r'_{\Omega^x(D)} := (p_D^x\otimes D)\circ t'_{D,D}\circ(D\otimes i_D^x),$$

$$s_{\Omega^x(D)} := (p_D^x\otimes D)\circ t_{D,D}\circ(D\otimes i_D^x), \quad s'_{\Omega^x(D)} := (D\otimes p_D^x)\circ t'_{D,D}\circ(i_D^x\otimes D),$$

es un $(\Omega^x(D), D)$-OD.

Lema 3.3.10. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Se cumple que la cuádrupla $(r_{\Omega^x(D)}, r'_{\Omega^x(D)}, s_{\Omega^x(D)}, s'_{\Omega^x(D)})$ dada en la Observación previa es un $(\Omega^x(D), D)$-OD compatible con las estructuras de (co)módulo sobre $\Omega^x(D)$ definidas en la Proposición 3.3.7 para $x \in \{a, c\}$.*

Prueba:
Probaremos el caso $x = a$. La prueba para para $x = c$ es semejante. En primer lugar debemos comprobar que

$$r_{\Omega^a(D)} \circ (\varphi_{\Omega^a(D)} \otimes D) = (D \otimes \varphi_{\Omega^a(D)}) \circ (t_{D,D} \otimes \Omega^a(D)) \circ (D \otimes r_{\Omega^a(D)}), \tag{3.48}$$

$$r'_{\Omega^a(D)} \circ (D \otimes \varphi_{\Omega^a(D)}) = (\varphi_{\Omega^a(D)} \otimes D) \circ (D \otimes r'_{\Omega^a(D)}) \circ (t'_{D,D} \otimes \Omega^a(D)) \tag{3.49}$$

y las igualdades análogas tomando $t_{D,D}$, $t'_{D,D}$, $s_{\Omega^a(D)}$ y $s'_{\Omega^a(D)}$ en vez de $t'_{D,D}$, $t_{D,D}$, $r'_{\Omega^a(D)}$ y $r_{\Omega^a(D)}$ respectivamente.

La prueba de (3.48) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
& r_{\Omega^a(D)} \circ (\varphi_{\Omega^a(D)} \otimes D) \\
&= (D \otimes p_D^a) \circ t_{D,D} \circ ((\omega_D^a \circ \varphi_D \circ (D \otimes i_D^a)) \otimes D) \\
&= (D \otimes p_D^a) \circ t_{D,D} \circ (\varphi_D \circ (D \otimes i_D^a)) \otimes D) \\
&= (D \otimes (p_D^a \circ \varphi_D)) \circ (t_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (D \otimes i_D^a \otimes D) \\
&= (D \otimes (p_D^a \circ \varphi_D)) \circ (t_{D,D} \otimes \omega_D^a) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (D \otimes i_D^a \otimes D) \\
&= (D \otimes \varphi_{\Omega^a(D)}) \circ (t_{D,D} \otimes \Omega^a(D)) \circ (D \otimes r_{\Omega^a(D)}),
\end{aligned}$$

donde las igualdades primera y última se siguen por la definición de $\varphi_{\Omega^a(D)}$ y $r_{\Omega^a(D)}$, la segunda por el apartado (ii) de la Proposición 3.3.5, la tercera por el apartado (ii) de la Proposición 3.3.3 y la cuarta por las propiedades de la escisión y (i) del Lema 3.3.8.

La igualdad (3.49) se demuestra usando los mismos argumentos pero aplicando los resultados correspondientes a $t'_{D,D}$.

La comprobación de la compatibilidad con la estructura de comódulo es inmediata sin más que aplicar las correspondientes propiedades de comódulo en vez de las de módulo. □

Proposición 3.3.11. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Se cumple que:*

(i) El triple $(\Omega^a(D), \varphi_{\Omega^a(D)}, \rho_{\Omega^a(D)})$ es un objeto en ${}^D_D\mathcal{YD}$.

(ii) El triple $(\Omega^c(D), \psi_{\Omega^c(D)}, \varrho_{\Omega^c(D)})$ es un objeto en ${}^D_D\mathcal{YD}$.

Prueba:
En virtud del Lema 3.3.10 y de la Proposición 3.1.6, para obtener el apartado (i) es suficiente con demostrar la condición (yd3-ii).

Para el triple $(\Omega^a(D), \varphi_{\Omega^a(D)}, \rho_{\Omega^a(D)})$ (yd3-ii) se cumple ya que

$$
\begin{aligned}
&(\mu_D \otimes \Omega^a(D)) \circ (D \otimes r_{\Omega^a(D)}) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_{\Omega^a(D)}) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
&\circ(\delta_D \otimes \rho_{\Omega^a(D)})) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes s_{\Omega^a(D)}) \circ (\delta_D \otimes \Omega^a(D)) \\
= &(\mu_D \otimes p^a_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\mu_D \otimes (\omega^a_D \circ \varphi_D) \otimes D) \\
&\circ(D \otimes t_{D,D} \otimes \omega^a_D \otimes D) \circ (\delta_D \otimes (\delta_D \circ \omega^a_D) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes i^a_D) \\
= &(\mu_D \otimes p^a_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
&\circ(\delta_D \otimes \delta_D)) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes i^a_D) \\
= &(D \otimes p^a_D) \circ \delta_D \circ \varphi_D \circ (D \otimes i^a_D) \\
= &\rho_{\Omega^a(D)} \circ \varphi_{\Omega^a(D)},
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue por la definición de $\varphi_{\Omega^a(D)}$ y $\rho_{\Omega^a(D)}$, la segunda por (i) del Lema 3.3.8 y (i) de la Proposición 3.3.5, la tercera por el apartado (ii) de la Proposición 3.3.4 y la cuarta es consecuencia del apartado (ii) de la Proposición 3.3.5 y de las definiciones de las (co)estructuras de (co)módulo.

El apartado (ii) puede probarse con idénticos argumentos. □

Capítulo 4

Equivalencias entre las distintas categorías de módulos Yetter-Drinfeld

En este capítulo se definen las distintas categorías de módulos Yetter-Drinfeld en el contexto monoidal que surgen al variar el lado por el que se consideran las estructuras de (co)módulo, esto es ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$, $\mathcal{YD}_{D}^{D}$, ${}_{D}\mathcal{YD}^{D}$ y ${}^{D}\mathcal{YD}_{D}$; así como al variar la (co)multiplicación en la BTD o AHTD. En una segunda sección se utilizan las transformaciones en las estructuras de (co)módulo definidas en la Sección 2.2 para demostrar un teorema sobre la equivalencia de varias de estas categorías de módulos Yetter-Drinfeld.

Al igual que en los otros capítulos $\mathcal{C}$ denota una categoría monoidal estricta donde todo idempotente rompe.

4.1. Distintas categorías de módulos Yetter-Drinfeld

La motivación de la sección es extender los conceptos de [81] al contexto general débil. En el caso donde las estructuras de (co)módulo vienen dadas ambas por la derecha la definición será en cierto modo análoga a la dada cuando ambas vienen dadas por la izquierda, pero en el caso cruzado la cuestión es más delicada.

Comenzamos dando las definiciones de todas las clases de módulos Yetter-Drinfeld en un contexto débil trenzado.

Definición 4.1.1. Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Se dice que (M, ψ_M, ρ_M) es un módulo Yetter-Drinfeld derecha-derecha sobre D si (M, ψ_M) es un D-módulo por la derecha, (M, ρ_M) un D-comódulo por la derecha y se cumplen las siguientes condiciones:

(yd1-dd) $\rho_M = (\psi_M \otimes \mu_D) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\rho_M \otimes \delta_D) \circ (M \otimes \eta_D)$.

(yd2-dd) Existe un (M, D)-OD (r_M, r'_M, s_M, s'_M) compatible con las estructuras de (co)módulo de M tal que

$$\begin{aligned}&(\psi_M \otimes \mu_D) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\rho_M \otimes \delta_D)\\ &= (M \otimes \mu_D) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes (\rho_M \circ \psi_M)) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D).\end{aligned}$$

La clase de todos los módulos Yetter-Drinfeld derecha-derecha sobre D será denotada por $\mathcal{YD}_D^D$.

Definición 4.1.2. Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Se dice que (M, φ_M, ρ_M) es un módulo Yetter-Drinfeld izquierda-derecha sobre D si (M, φ_M) es un D-módulo por la izquierda, (M, ρ_M) es un D-comódulo por la derecha y se cumplen las siguientes condiciones:

(yd1-id) Existe un (M, D)-OD (r_M, r'_M, s_M, s'_M) compatible con las estructuras de (co)módulo de M tal que

$$\rho_M = (\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \rho_M) \circ (\eta_D \otimes M).$$

(yd2-id) Tomando el (M, D)-OD de la condición (yd1-id) se cumple:

$$\begin{aligned}&(\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \rho_M)\\ &= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes (\rho_M \circ \varphi_M)) \circ (\delta_D \otimes M).\end{aligned}$$

La clase de todos los módulos Yetter-Drinfeld izquierda-derecha sobre D será denotada por ${}_D\mathcal{YD}^D$.

Definición 4.1.3. Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Se dice que (M, ψ_M, ϱ_M) es un módulo de Yetter-Drinfeld derecha-izquierda sobre D si (M, ψ_M) es un D-módulo por la derecha, (M, ϱ_M) es un D-comódulo por la izquierda y se cumplen las siguientes condiciones:

(yd1-di) Existe un (M, D)-OD (r_M, r'_M, s_M, s'_M) compatible con las estructuras de (co)módulo de M tal que

$$\varrho_M = (\mu_D \otimes \psi_M) \circ (D \otimes r_M \otimes D) \circ (\varrho_M \otimes \delta_D) \circ (M \otimes \eta_D).$$

(yd2-di) Tomando el (M, D)-OD de la condición (yd1-di) se cumple:

$$(\mu_D \otimes \psi_M) \circ (D \otimes r_M \otimes D) \circ (\varrho_M \otimes \delta_D)$$
$$= ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ ((\varrho_M \circ \psi_M) \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D).$$

La clase de todos los módulos Yetter-Drinfeld derecha-izquierda sobre D será denotada por ${}^D\mathcal{YD}_D$.

La definición de los morfismos entre objetos de estas clases es análoga a la del caso izquierda-izquierda (véase la Definición 3.1.3).

Definición 4.1.4. Sean $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ y $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ dos triples en la misma clase $\mathcal{YD}_D^D$, ${}_D\mathcal{YD}^D$ o ${}^D\mathcal{YD}_D$ y con operadores débiles asociados $(r_M, r'{}_M, s_M, s'_M)$ y $(r_N, r'{}_N, s_N, s'{}_N)$ respectivamente. Se dice que el morfismo $f : M \to N$ es un morfismo de módulos Yetter-Drinfeld derecha-derecha o izquierda-derecha o derecha-izquierda según corresponda si:

(i) El morfismo f es de (co)módulos (derecha o izquierda según corresponda),

(ii) $r_N \circ (f \otimes D) = (D \otimes f) \circ r_M, \qquad s_N \circ (D \otimes f) = (f \otimes D) \circ s_M.$

Observación 4.1.5. Recuérdese que gracias al Lema 2.1.20 se obtiene que si $f : M \to N$ es un morfismo de módulos Yetter-Drinfeld entonces también se cumple:

$$r'_N \circ (D \otimes f) = (f \otimes D) \circ r'_M \text{ y } s'_N \circ (f \otimes D) = (D \otimes f) \circ s'_M.$$

Observación 4.1.6. Cuando la categoría $\mathcal{C}$ es simétrica y se toma como operador Yang-Baxter débil la trenza c de la categoría y como (M, D)-OD la cuádrupla $(c_{M,D}, c_{D,M}, c_{D,M}, c_{M,D})$ se recuperan las definiciones clásicas de las distintas clases de módulos Yetter-Drinfeld introducidas en [81] en el contexto de las álgebras de Hopf y en [22], [74] en el contexto de las álgebras de Hopf débiles (véase (1) de Ejemplos 1.2.6). Es más, suponiendo $\mathcal{C}$ trenzada con trenza c, tomando $t_{D,D} = c_{D,D}$, $t'_{D,D} = c^{-1}_{D,D}$ y la cuádrupla $(c_{M,D}, c^{-1}_{M,D}, c_{D,M}, c^{-1}_{D,M})$ como (M, D)-OD se cumplen las definiciones análogas en el contexto trenzado.

Se definen de modo semejante a la categoría ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$ las categorías de módulos Yetter-Drinfeld derecha-derecha, que se denotará por $\mathcal{YD}^{D}_{D}$, izquierda-derecha, denotada por ${}_{D}\mathcal{YD}^{D}$, y derecha-izquierda, denotada por ${}^{D}\mathcal{YD}_{D}$.

Observación 4.1.7. Siguiendo los mismos argumentos empleados en la Proposición 3.1.6, teniendo en cuenta que en este caso el papel que en la proposición desempeñaba Π^{L}_{D} lo juega ahora Π^{R}_{D}, usando (1.44) en vez de (1.43), (1.42) en vez de (1.41) y (1.45) en vez de (1.46), se deduce que:

Si D es un AHTD en $\mathcal{C}$, (M, ψ_M) un D-módulo por la derecha y (M, ρ_M) un D-comódulo por la derecha, y existe (r_M, r'_M, s_M, s'_M) un (M, D)-OD compatible con las estructuras de (co)módulo de M, entonces el cumplimiento simultáneo de las condiciones (yd1-dd) e (yd2-dd) equivale al de la condición:

$$\begin{aligned}\text{(yd3-dd)}\ \ \rho_M \circ \psi_M = {} & (M \otimes \mu_D) \circ (s_M \otimes D) \circ (\lambda_D \otimes ((\psi_M \otimes \mu_D) \\ & \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\rho_M \otimes \delta_D))) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D).\end{aligned}$$

En el caso cruzado, si bien puede darse también una caracterización alternativa, se requiere que el antípodo sea inversible. En concreto:

Proposición 4.1.8. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible, (M, φ_M) un D-módulo por la izquierda y (M, ρ_M) un D-comódulo por la derecha. Suponiendo la existencia de un (M, D)-OD (r_M, r'_M, s_M, s'_M) compatible con las estructuras de (co)módulo de M, las igualdades (yd1-id) y (yd2-id) son equivalentes a:*

$$\begin{aligned}\textit{(yd3-id)}\ \ \rho_M \circ \varphi_M = {} & (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (\lambda_D^{-1} \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D) \\ & \circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \rho_M))) \circ (\delta_D \otimes M).\end{aligned}$$

Prueba:

Probaremos en primer lugar que el cumplimiento de (yd1-id) y (yd2-id) implica (yd3-id). En efecto:

$$\begin{aligned}& (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (\lambda_D^{-1} \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \\ & \circ (\delta_D \otimes \rho_M))) \circ (\delta_D \otimes M) \\ = {} & (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (D \otimes r'_M \otimes M)\end{aligned}$$

$$\circ(D\otimes D\otimes(\rho_M\circ\varphi_M))\circ(\lambda_D^{-1}\otimes\delta_D\otimes M)\circ(\delta_D\otimes M)$$

$$=(M\otimes(\mu_D\circ t'_{D,D}))\circ(r'_M\otimes D)\circ((\mu_D\circ t'_{D,D}\circ(\lambda_D^{-1}\otimes D)\circ\delta_D)\otimes(\rho_M$$

$$\circ\varphi_M))\circ(\delta_D\otimes M)$$

$$=(M\otimes(\mu_D\circ t'_{D,D}))\circ(r'_M\otimes D)\circ(\overline{\Pi}_D^L\otimes(\rho_M\circ\varphi_M))\circ(\delta_D\otimes M)$$

$$=(M\otimes(\mu_D\circ t'_{D,D}))\circ(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes(\rho_M\circ\varphi_M))\circ(D\otimes\mu_D\otimes M)$$

$$\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes D\otimes M)$$

$$=(M\otimes(\mu_D\circ t'_{D,D}))\circ(r'_M\otimes M)\circ(D\otimes(\rho_M\circ\varphi_M))\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes\varphi_M)$$

$$=(\varphi_M\otimes\mu_D)\circ(D\otimes s_M\otimes M)\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes\varphi_M)$$

$$=\rho_M\circ\varphi_M,$$

donde las igualdades primera y sexta se siguen de (yd2-id). En cuanto a la segunda igualdad, se usa la coasociatividad de δ_D, la asociatividad de $\mu_{D^{\mathrm{op}}}$ y (e1) de la Definición 2.1.1. La tercera igualdad es cierta porque como consecuencia de la anticomultiplicatividad de λ_D^{-1}, (1.29) y (1.34) se tiene que

$$\mu_D\circ t'_{D,D}\circ(\lambda_D^{-1}\otimes D)\circ\delta_D=\overline{\Pi}_D^L. \tag{4.1}$$

La cuarta igualdad se deduce de (1.45), la quinta de la condición de módulo y la última de (yd1-id).

Asumiendo ahora (yd3-id) se obtiene (yd2-id) de la siguiente manera:

$$(M\otimes(\mu_D\circ t'_{D,D}))\circ(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes(\rho_M\circ\varphi_M))\circ(\delta_D\otimes M)$$

$$=(M\otimes(\mu_D\circ t'_{D,D}))\circ(r'_M\otimes(\mu_D\circ t'_{D,D}))\circ(D\otimes r'_M\otimes D)$$

$$\circ(D\otimes\lambda_D^{-1}\otimes((\varphi_M\otimes\mu_D)\circ(D\otimes s_M\otimes D)\circ(\delta_D\otimes\rho_M)))$$

$$\circ(D\otimes\delta_D\otimes M)\circ(\delta_D\otimes M)$$

$$=(M\otimes(\mu_D\circ t'_{D,D}))\circ(r'_M\otimes D)\circ((\mu_D\circ t'_{D,D}\circ(D\otimes\lambda_D^{-1})$$

$$\circ\delta_D)\otimes((\varphi_M\otimes\mu_D)\circ(D\otimes s_M\otimes D)\circ(\delta_D\otimes\rho_M)))\circ(\delta_D\otimes M)$$

$$
\begin{aligned}
&= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (\overline{\Pi}_D^R \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \\
&\circ (\delta_D \otimes \varrho_M))) \circ (\delta_D \otimes M) \\
&= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (\lambda_D^{-1} \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \\
&\circ (\delta_D \otimes \rho_M))) \circ (D \otimes \mu_D \otimes M) \circ (t_{D,D} \otimes D \otimes M) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (\lambda_D^{-1} \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D))) \\
&\circ (D \otimes ((\mu_D \otimes \mu_D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \delta_D)) \otimes \rho_M) \circ (t_{D,D} \otimes D \otimes M) \\
&\circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes \varphi_M \otimes D) \circ (t_{D,D} \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D) \\
&\circ (D \otimes s_M \otimes D))) \circ (D \otimes D \otimes t_{D,D} \otimes \ M \otimes \mu_D) \\
&\circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D \otimes s_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \lambda_D^{-1} \otimes \delta_D \otimes \rho_M) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (\varphi_M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (D \otimes r'_M \otimes \mu_D) \circ (t'_{D,D} \otimes s_M \otimes D) \\
&\circ (t_{D,D} \otimes D \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \rho_M))) \\
&\circ (D \otimes t_{D,D} \otimes D \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \lambda_D^{-1} \otimes D \otimes M) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (M \otimes (\mu_D \circ (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}))) \circ (\varphi_M \otimes t'_{D,D} \otimes D) \\
&\circ (D \otimes r'_M \otimes D \otimes D) \circ (D \otimes D \otimes s_M \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D) \\
&\circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \rho_M))) \circ (\delta_D \otimes \lambda_D^{-1} \otimes D \otimes M) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (M \otimes (\mu_D \circ (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t'_{D,D}))) \circ (\varphi_M \otimes (t'_{D,D} \circ t_{D,D}) \otimes D) \\
&\circ (D \otimes s_M \otimes D \otimes D) \circ (D \otimes D \otimes r'_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \lambda_D^{-1} \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D) \\
&\circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \rho_M))) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (\delta_D \otimes r'_M \otimes D) \\
&\circ (D \otimes \lambda_D^{-1} \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \rho_M))) \circ (D \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \rho_M) \circ (D \otimes (\varphi_M \circ (\eta_D \otimes M)))
\end{aligned}
$$

$$= (\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \rho_M),$$

donde las igualdades primera y undécima se siguen por (yd3-id), la segunda por la coasociatividad de δ_D, la asociatividad en $\mu_{D^{\mathrm{coop}}}$, (e1) y (e4-2) de la Definición 2.1.1. En la tercera igualdad se usa que

$$\mu_D \circ t'_{D,D} \circ (D \otimes \lambda_D^{-1}) \circ \delta_D = \overline{\Pi}_D^R. \tag{4.2}$$

La cuarta igualdad es consecuencia de (1.46) y (1.34), la quinta de (b4) de la Definición 1.2.9; la sexta de (1.54) para D^{coop}, (b3-4) de la Definición 1.2.9, la condición de módulo, (e4) y la asociatividad de μ_D. La séptima igualdad se deduce a partir de la compatibilidad del (M, D)-OD con la estructura de módulo, la octava por (1.2), (a2-2) de la Definición 1.2.4 y (b2-1) de la Definición 1.2.9, la novena por (e2-1) de la Definición 2.1.1 y la décima por (1.2), (a2-2) de la Definición 1.2.4 y (b1-1) de la Definición 1.2.9. Finalmente, la duodécima igualdad es consecuencia de la condición de módulo.

Una vez conocido que la condición (yd3-id) implica (yd2-id) probaremos que también implica (yd1-id):

$$\begin{aligned}
&\rho_M \\
&= \rho_M \circ \varphi_M \circ (\eta_D \otimes M) \\
&= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (\lambda_D^{-1} \otimes ((\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \\
&\quad \circ(\delta_D \otimes \rho_M))) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (D \otimes r'_M \otimes D) \\
&\quad \circ(D \otimes D \otimes (\rho_M \circ \varphi_M)) \circ (\lambda_D^{-1} \otimes \delta_D \otimes M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ ((\mu_D \circ t'_{D,D} \circ (\lambda_D^{-1} \otimes D) \circ \delta_D) \otimes (\rho_M \circ \varphi_M)) \\
&\quad \circ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \rho_M).
\end{aligned}$$

En estos cálculos, la primera igualdad se obtiene gracias a la condición de módulo, la segunda es consecuencia de (yd3-id), la tercera de (yd2-id), la cuarta de la coasociatividad de δ_D, la asociatividad de $\mu_{D^{\mathrm{coop}}}$, (e1) y (e4-2) de la Definición 2.1.1; la última se sigue de (4.1), (1.34), (1.32) y (1.48). □

Proposición 4.1.9. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible, (M, ψ_M) un D-módulo por la derecha y (M, ϱ_M) un D-comódulo por la izquierda. Suponiendo la existencia de un (M, D)-OD $(r_M, r'_M, s_M, s'{}_M)$ compatible con las estructuras de (co)módulo de M, las igualdades (yd1-di) y (yd2-di) equivalen a:*

$$\text{(yd3-di)}\quad \varrho_M \circ \psi_M = ((\mu \circ t'_{D,D}) \otimes M) \circ (D \otimes s'_M) \circ (((\mu_D \otimes \psi_M) \\ \circ (D \otimes r_M \otimes D) \circ (\varrho_M \otimes \delta_D)) \otimes \lambda_D^{-1}) \circ (M \otimes \delta_D).$$

Prueba:
La demostración usa los mismos argumentos que los de la Proposición 4.1.8, tan solo que ahora intercambian sus papeles respectivos r'_M con s'_M, r_M con s_M, Π_D^L con Π_D^R y $\overline{\Pi}_D^L$ con $\overline{\Pi}_D^R$. □

En el caso derecha-derecha, siguiendo el esquema empleado en el Lema 3.1.7 se deduce el resultado análogo para la categoría $\mathcal{YD}_D^D$. En concreto, usando ahora (yd3-dd) e intercambiando los papeles desempeñados por Π_D^L y Π_D^R así como $\overline{\Pi}_D^L$ y $\overline{\Pi}_D^R$ respectivamente en la prueba del Lema 3.1.7 resulta:

Lema 4.1.10. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Si $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ es un objeto en $\mathcal{YD}_D^D$ entonces cumple las siguientes propiedades:*

(i) $\rho_M \circ \psi_M \circ (M \otimes \Pi_D^R) = (M \otimes \mu_D) \circ (\rho_M \otimes \Pi_D^R)$,

(ii) $(M \otimes \Pi_D^R) \circ \rho_M \circ \psi_M = (\psi_M \otimes \Pi_D^R) \circ (M \otimes \delta_D)$,

(iii) $\rho_M \circ \psi_M \circ (M \otimes \Pi_D^L)$

$$= (M \otimes \mu_D) \circ ((s_M \circ r_M) \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (\rho_M \otimes (\lambda_D \circ \Pi_D^L)),$$

(iv) $(M \otimes \Pi_D^L) \circ \rho_M \circ \psi_M$

$$= (\psi_M \otimes (\Pi_D^L \circ \lambda_D)) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ ((s_M \circ r_M) \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D).$$

Similarmente se tiene el resultado análogo de la Proposición 3.1.10 para $\mathcal{YD}_D^D$, es decir:

Proposición 4.1.11. *Sea D un AHTD con antípodo inversible y (M, ψ_M, ρ_M) un objeto de $\mathcal{YD}_D^D$. Se cumple que*

$$\varphi_M \circ \nabla_{r_M} = \psi_M \circ \nabla_{s'_M} = \psi_M \text{ y } \nabla_{r_M} \circ \rho_M = \nabla_{s'_M} \circ \rho_M = \rho_M. \tag{4.3}$$

En el caso cruzado la situación es muy semejante, aunque ahora es necesaria además la inversibilidad del antípodo. En concreto se tiene el siguiente resultado, cuya demostración se omite por ser similar a la desarrollada en el Lema 3.1.7.

Lema 4.1.12. *Si D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Se cumple lo siguiente:*

(i) Sea (M, φ_M, ρ_M) un objeto en ${}_D\mathcal{YD}^D$. Entonces:

(i-1) $\rho_M \circ \varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes D) = (M \otimes \mu_D) \circ (\rho_M \otimes D) \circ r'_M \circ ((\lambda_D^{-1} \circ \Pi_D^L) \otimes M)$,

(i-2) $(M \otimes \Pi_D^R) \circ \rho_M \circ \varphi_M = (M \otimes (\Pi_D^R \circ \lambda_D^{-1})) \circ r'_M \circ (D \otimes \varphi_M) \circ (\delta_D \otimes M)$,

(i-3) $\rho_M \circ \varphi_M \circ (\Pi_D^R \otimes M) = (M \otimes \mu_D) \circ (s_M \otimes D) \circ (\Pi_D^R \otimes \rho_M)$,

(i-4) $(M \otimes \Pi_D^L) \circ \rho_M \circ \varphi_M = (\varphi_M \otimes \Pi_D^L) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$.

(ii) Si (M, ψ_M, ϱ_M) un objeto en ${}^D\mathcal{YD}_D$. Entonces:

(ii-1) $\varrho_M \circ \psi_M \circ (M \otimes \Pi_D^R) = (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M) \circ s'_M \circ (M \otimes (\lambda_D^{-1} \circ \Pi_D^R))$,

(ii-2) $(\Pi_D^L \otimes M) \circ \varrho_M \circ \psi_M = ((\Pi_D^L \circ \lambda_D^{-1}) \otimes M) \circ s'_M \circ (\psi_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D)$,

(ii-3) $\varrho_M \circ \psi_M \circ (M \otimes \Pi_D^L) = (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (\varrho_M \otimes \Pi_D^L)$,

(ii-4) $(\Pi_D^R \otimes M) \circ \varrho_M \circ \psi_M = (\Pi_D^R \otimes \psi_M) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D)$.

Corolario 4.1.13. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Se cumple que:*

(i) Si (M, φ_M, ρ_M) es un objeto de ${}_D\mathcal{YD}^D$, entonces:

$$\varphi_M \circ \nabla_{s_M} = \varphi_M \circ \nabla_{r'_M} = \varphi_M \text{ y } \nabla_{r_M} \circ \rho_M = \nabla_{s'_M} \circ \rho_M = \rho_M. \tag{4.4}$$

(ii) Si (M, ψ_M, ϱ_M) es un objeto de ${}^D\mathcal{YD}_D$, entonces:

$$\psi_M \circ \nabla_{r_M} = \psi_M \circ \nabla_{s'_M} = \psi_M \text{ y } \nabla_{s_M} \circ \varrho_M = \nabla_{r'_M} \circ \varrho_M = \varrho_M. \tag{4.5}$$

Prueba:
Probaremos en primer lugar (i). Componiendo con $M \otimes \varepsilon_D$ en (i-4) del Lema 4.1.12, aplicando $\varepsilon_D \circ \Pi_D^L = \varepsilon_D$ y $\nabla_{s_M} = (D \otimes ((M \otimes \varepsilon_D) \circ s_M)) \circ (\delta_D \otimes M)$ de (e3-3) de la Definición 2.1.1 se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\varphi_M \\
&= (M \otimes \varepsilon_D) \circ \rho_M \circ \varphi_M \\
&= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \Pi_D^L)) \circ \rho_M \circ \varphi_M \\
&= (\varphi_M \otimes \varepsilon_D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M) \\
&= \varphi_M \circ \nabla_{s_M}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, componiendo con $M \otimes \varepsilon_D$ en (i-2) del Lema 4.1.12, entonces gracias a la condición (e3-2) de la Definición 2.1.1, las igualdades $\varepsilon_D = \varepsilon_D \circ \Pi_D^R = \varepsilon_D \circ \lambda_D^{-1}$, la compatibilidad del (M, D)-OD con la estructura de módulo y el Corolario 2.1.18 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
&\varphi_M \\
&= (M \otimes (\varepsilon_D \circ \Pi_D^R)) \circ \rho_M \circ \varphi_M \\
&= (M \otimes \varepsilon_D) \circ (M \otimes (\lambda_D^{-1} \circ \Pi_D^R)) \circ r'_M \circ (D \otimes \varphi_M) \circ (\delta_D \otimes M) \\
&= (\varphi_M \otimes \varepsilon_D) \circ (D \otimes r'_M) \circ ((t'_{D,D} \circ \delta_D) \otimes M) \\
&= \varphi_M \circ \nabla_{r'_M}.
\end{aligned}$$

En lo que respecta a la estructura de comódulo, componiendo con $\eta_D \otimes M$ en (i-3) del Lema 4.1.12, aplicando (e3-3) de la Definición 2.1.1 y $\eta_D = \Pi_D^R \circ \eta_D$ resulta:

$$\begin{aligned}
&\rho_M \\
&= \rho_M \circ \varphi_M \circ ((\Pi_D^R \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (M \otimes \mu_D) \circ (s_M \otimes D) \circ ((\Pi_D^R \circ \eta_D) \otimes \rho_M) \\
&= \nabla_{s'_M} \circ \rho_M.
\end{aligned}$$

Finalmente, componiendo con $\eta_D \otimes M$ en (i-1) del Lema 4.1.12, por la compatibilidad del (M, D)-OD y usando las igualdades $\eta_D = \Pi_D^L \circ \eta_D = \lambda_D^{-1} \circ \eta_D$ y el apartado (i) del Corolario 2.1.18 podemos concluir que:

$$\rho_M$$

$$= \rho_M \circ \varphi_M \circ ((\Pi_D^L \circ \eta_D) \otimes M)$$

$$= (M \otimes \mu_D) \circ (\rho_M \otimes D) \circ r'_M \circ ((\lambda_D^{-1} \circ \Pi_D^L \circ \eta_D) \otimes M)$$

$$= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (\eta_D \otimes \rho_M)$$

$$= \nabla_{r_M} \circ \rho_M.$$

Las demostraciones de las igualdades incluidas en el apartado (ii) siguen los mismos argumentos. □

4.2. Equivalencias

En esta sección se utilizan los resultados previos para demostrar la equivalencia entre varias de las categorías de módulos Yetter-Drinfeld. Como caso particular, cuando trabajamos con álgebras de Hopf en un contexto trenzado se recuperan los resultados de [81].

Teorema 4.2.1. *Sea D una AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $(M, \varphi_M, \varrho_M) \in {}_D^D\mathcal{YD}$,

(ii) $(M, \psi_M^{\lambda}, \rho_M^{\lambda^{-1}}) \in \mathcal{YD}_D^D$,

(iii) $(M, \psi_M^{\lambda^{-1}}, \rho_M^{\lambda}) \in \mathcal{YD}_D^D$,

(iv) $(M, \psi_M, \rho'_M) \in \mathcal{YD}_{D^{coop^{op}}}^{D^{coop^{op}}}$,

(v) $(M, \psi'_M, \rho_M) \in \mathcal{YD}_{D^{op^{coop}}}^{D^{op^{coop}}}$,

(vi) $(M, \varphi_M, \rho'_M) \in {}_{D^{coop}}\mathcal{YD}^{D^{coop}}$,

(vii) $(M, \psi'_M, \varrho_M) \in {}^{D^{op}}\mathcal{YD}_{D^{op}}$,

(viii) $(M, \varphi_M, \rho_M^{\lambda^{-1}}) \in {}_D\mathcal{YD}^D$,

(ix) $(M, \psi_M^{\lambda^{-1}}, \varrho_M) \in {}^D\mathcal{YD}_D$.

Prueba:
En primer lugar, nótese que como consecuencia de las Proposiciones 3.1.10 y 4.1.11, el Corolario 4.1.13 y el Lema 2.2.1, se obtiene que en cada uno de los apartados se cumplen las hipótesis de las Proposiciones 2.2.8 – 2.2.16. En esas proposiciones se demuestra la existencia de un operador débil compatible con la estructura de (co)módulo sobre M obtenida al aplicar las transformaciones indicadas en cada apartado del teorema, por lo que la prueba se reduce a comprobar las condiciones tipo-(yd1) y tipo-(yd2) en cada apartado.

Es más, para demostrar la equivalencia entre dos apartados cualesquiera es suficiente con probar una sola implicación. En efecto, si una de ellas ha sido demostrada, tomando las transformaciones convenientes en las estructuras de (co)módulo de entre las expuestas en las Proposiciones 2.2.8 – 2.2.16, se obtiene la implicación opuesta sin más que utilizar los mismos argumentos. Además, aplicando dos veces sucesivas los mismos razonamientos se recuperan las estructuras de partida. Esto indica que cualquiera de los apartados puede ser deducido de (i).

Nótese también que si se toma (r_M, r'_M, s_M, s'_M) como el (M, D)-OD compatible en el apartado (i), entonces habrá de tomarse (s'_M, s_M, r'_M, r_M) en (vi) y (vii), siguiendo los resultados de las Proposiciones 2.2.9 y 2.2.14 respectivamente. Sin embargo, es relevante señalar que los roles de los morfismos r_M y s'_M, y respectivamente r'_M y s_M, son simétricos, por lo que las Proposiciones 2.2.8 – 2.2.16 implican que es completamente irrelevante la elección concreta del (M, D)-OD hecha en el apartado de partida; las transformaciones indicadas en el enunciado, que son las mismas que las estudiadas en las Proposiciones 2.2.8 – 2.2.16, conducirán siempre a un operador débil compatible.

Supongamos que tenemos (i). Comprobaremos que es equivalente a (ii). En efecto, la condición (yd1-dd) puede comprobarse mediante los siguientes cálculos:

$$
\begin{aligned}
&(\psi_M^{\lambda} \otimes \mu_D) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\rho_M^{\lambda^{-1}} \otimes (\delta_D \circ \eta_D)) \\
&= ((\psi_M^{\lambda} \circ (M \otimes \Pi_D^R)) \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D) \circ \rho_M^{\lambda^{-1}} \\
&= ((\psi_M^{\lambda} \circ (M \otimes \Pi_D^R) \circ \rho_M^{\lambda^{-1}}) \otimes D) \circ \rho_M^{\lambda^{-1}} \\
&= ((\varphi_M \circ \nabla_{r'_M} \circ ((\lambda_D \circ \Pi_D^R \circ \lambda_D^{-1}) \otimes M) \circ \rho_M) \otimes D) \circ \rho_M^{\lambda^{-1}}
\end{aligned}
$$

$$= ((\varphi_M \circ (\Pi_D^L \otimes M) \circ \rho_M) \otimes D) \circ \rho_M^{\lambda^{-1}}$$
$$= \rho_M^{\lambda^{-1}},$$

donde la primera igualdad es consecuencia de (1.44), la segunda de la definición de la estructura de comódulo, la tercera de las definiciones de ψ_M^{λ} y $\rho_M^{\lambda^{-1}}$, la cuarta de (1.33), y la quinta se sigue de (yd1-ii).

Para probar (yd2-dd), componiendo con λ_D y λ_D^{-1} en (yd2-ii) se obtiene, por el lado derecho:

$$(\lambda_D{}^{-1} \otimes M) \circ (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D) \circ (D \otimes s_M)$$
$$\circ (\delta_D \otimes M) \circ (\lambda_D \otimes M)$$
$$= ((\mu_D \circ t'_{D,D} \circ (\lambda_D^{-1} \otimes \lambda_D^{-1})) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D) \circ (D \otimes s_M)$$
$$\circ (((\lambda_D \otimes \lambda_D) \circ t_{D,D} \circ \delta_D) \otimes M)$$
$$= ((\mu_D \circ t'_{D,D} \circ (\lambda_D^{-1} \otimes D)) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ ((\nabla_{r'_M} \circ \varrho_M$$
$$\circ \varphi_M \circ \nabla_{r'_M}) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (((\lambda_D \otimes D) \circ t_{D,D} \circ \delta_D) \otimes M)$$
$$= ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \circ ((\rho_M^{\lambda^{-1}} \circ \psi_M^{\lambda}) \otimes D)$$
$$\circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ ((t_{D,D} \circ \delta_D) \otimes M)$$
$$= r_M \circ (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ ((\rho_M^{\lambda^{-1}} \circ \psi_M^{\lambda}) \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (s_M \otimes D)$$
$$\circ (D \otimes r'_M) \circ (\delta_D \otimes M).$$

En estos cálculos, en la primera igualdad se usa (1.55) y (1.57), la segunda se sigue por las Proposiciones 2.1.17 y 3.1.10, la tercera por la Proposición 2.1.17 y las definiciones de $\rho_M^{\lambda^{-1}}$ y ψ_M^{λ}; la última resulta de las condiciones (e2-1), (e1) y (e4-1) de la Definición 2.1.1.

Para el lado izquierdo, por los mismos argumentos se obtiene

$$(\lambda_D^{-1} \otimes M) \circ (\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M) \circ (\lambda_D \otimes M)$$
$$= ((\mu_D \circ t'_{D,D} \circ (\lambda_D^{-1} \otimes \lambda_D^{-1})) \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$
$$\circ (((\lambda_D \otimes \lambda_D) \circ t_{D,D} \circ \delta_D) \otimes \varrho_M)$$

$$= ((\mu_D \circ t'_{D,D} \circ (D \otimes \lambda_D^{-1})) \otimes (\varphi_M \circ \nabla_{r'_M})) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M)$$
$$\circ(((D \otimes \lambda_D) \circ t_{D,D} \circ \delta_D) \otimes (\nabla_{r'_M} \circ \varrho_M))$$
$$= ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes (\psi_M^\lambda \circ r'_M)) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ ((t_{D,D} \circ \delta_D) \otimes (r_M \circ \rho_M^{\lambda^{-1}})).$$

Así pues:

$$r_M \circ (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ ((\rho_M^{\lambda^{-1}} \circ \psi_M^\lambda) \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \circ (s_M \otimes D)$$
$$\circ(D \otimes r'_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$
$$= ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes (\psi_M^\lambda \circ r'_M)) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ ((t_{D,D} \circ \delta_D) \otimes (r_M \circ \rho_M^{\lambda^{-1}})). \tag{4.6}$$

Componiendo con r_M y r'_M en (4.6) resulta que por un lado obtenemos

$$r'_M \circ r_M \circ (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ ((\rho_M^{\lambda^{-1}} \circ \psi_M^\lambda) \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D})$$
$$\circ(s_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (\delta_D \otimes M) \circ r_M$$
$$= \nabla_{r_M} \circ (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ ((\rho_M^{\lambda^{-1}} \circ \psi_M^\lambda) \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D})$$
$$\circ(s_M \otimes D) \circ (D \otimes \nabla_{r_M}) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D)$$
$$= \nabla_{r_M} \circ (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (\rho_M^{\lambda^{-1}} \otimes D) \circ s_M \circ (D \otimes \psi_M^\lambda) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D)$$
$$= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ ((\nabla_{r_M} \circ \rho_M^{\lambda^{-1}}) \otimes D) \circ s_M \circ (D \otimes \psi_M^\lambda) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D)$$
$$= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (\rho_M^{\lambda^{-1}} \otimes D) \circ s_M \circ (D \otimes \psi_M^\lambda) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D)$$
$$= (M \otimes (\mu_D \circ \nabla_{D,D})) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes (\rho_M^{\lambda^{-1}} \circ \psi_M^\lambda)) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D)$$
$$= (M \otimes \mu_D) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes (\rho_M^{\lambda^{-1}} \circ \psi_M^\lambda)) \circ (r_M \otimes D) \circ (M \otimes \delta_D),$$

donde la primera igualdad se sigue por definición de ∇_{r_M} y (e4-3) de la Definición 2.1.1, la segunda por (2.11) y la compatibilidad del operador débil con la estructura ψ_M^λ. La tercera es consecuencia de la fórmula

$$\nabla_{r_M} \circ (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) = (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (\nabla_{r_M} \otimes D), \tag{4.7}$$

que se obtiene gracias a la Proposición 2.1.19 y (2.7). En la cuarta igualdad se aplica la Proposición 3.1.10, la quinta se sigue de la compatibilidad del operador débil con la estructura $\rho_M^{\lambda^{-1}}$ y la última de (b1-1) de la Definición 1.2.9.

Por otro lado:

$$
\begin{aligned}
& r'_M \circ ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes (\psi_M^\lambda \circ r'_M)) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \\
& \circ((t_{D,D} \circ \delta_D) \otimes (r_M \circ \rho_M^{\lambda^{-1}})) \circ r_M \\
= {} & (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (D \otimes D \otimes (\psi_M^\lambda \circ r'_M)) \\
& \circ(D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes D \otimes (r_M \circ \rho_M^{\lambda^{-1}})) \circ (D \otimes r_M) \circ (r_M \otimes D) \\
& \circ(M \otimes (t_{D,D} \circ \delta_D)) \\
= {} & (\psi_M^\lambda \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (M \otimes t'_{D,D} \otimes D) \circ (r'_M \otimes t'_{D,D}) \circ (D \otimes r'_M \otimes D) \\
& \circ(D \otimes D \otimes r'_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes D \otimes r_M) \circ (D \otimes r_M \otimes D) \circ (r_M \otimes t_{D,D}) \\
& \circ(M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\rho_M^{\lambda^{-1}} \otimes (t_{D,D} \circ \delta_D)) \\
= {} & (\psi_M^\lambda \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (M \otimes t'_{D,D} \otimes D) \circ (r'_M \otimes \nabla_{D,D}) \circ (D \otimes r'_M \otimes D) \\
& \circ(D \otimes D \otimes \nabla_{r_M}) \circ (D \otimes r_M \otimes D) \circ (r_M \otimes t_{D,D}) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
& \circ(\rho_M^{\lambda^{-1}} \otimes (t_{D,D} \circ \delta_D)) \\
= {} & (\psi_M^\lambda \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (M \otimes t'_{D,D} \otimes D) \circ (r'_M \otimes D \otimes D) \\
& \circ(D \otimes \nabla_{r_M} \otimes D) \circ (r_M \otimes t_{D,D}) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ ((\nabla_{r_M} \circ \rho_M^{\lambda^{-1}}) \otimes (t_{D,D} \circ \delta_D)) \\
= {} & (\psi_M^\lambda \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (M \otimes t'_{D,D} \otimes D) \circ (\nabla_{r_M} \otimes t_{D,D}) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
& \circ(\rho_M^{\lambda^{-1}} \otimes (t_{D,D} \circ \delta_D)) \\
= {} & (\psi_M^\lambda \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (M \otimes t'_{D,D} \otimes D) \circ (\nabla_{r_M} \otimes D \otimes D) \circ (M \otimes (t_{D,D} \circ \delta_D) \otimes D) \\
& \circ(M \otimes t_{D,D}) \circ (\rho_M^{\lambda^{-1}} \otimes D) \\
= {} & (\psi_M^\lambda \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (M \otimes (\nabla_{D,D} \circ \delta_D) \otimes D) \circ (\nabla_{r_M} \otimes D) \circ (M \otimes t_{D,D}) \\
& \circ(\rho_M^{\lambda^{-1}} \otimes D)
\end{aligned}
$$

$$= ((\psi_M^{\lambda} \circ \nabla_{r_M}) \otimes (\mu_D \circ \nabla_{D,D})) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\rho_M^{\lambda^{-1}} \otimes \delta_D)$$
$$= (\psi_M^{\lambda} \otimes \mu_D) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\rho_M^{\lambda^{-1}} \otimes \delta_D),$$

donde la primera igualdad se sigue de (e4-3), (e4-2) y (e1) de la Definición 2.1.1, la segunda de la compatibilidad del operador débil con las nuevas estructuras $\rho_M^{\lambda^{-1}}$ y ψ_M^{λ}, mientras que la tercera se deduce por (e1) de la Definición 2.1.1 y (1.2). En la cuarta igualdad se aplica (1.10) junto con la fórmula

$$(D\otimes\nabla_{r_M})\circ(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D}) = (r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})\circ(\nabla_{r_M}\otimes D), \quad (4.8)$$

que es cierta por la condición (e1-1) de la Definición 2.1.1 y la Proposición 2.1.9. La quinta igualdad se tiene porque gracias a las Proposiciones 2.1.17 y 3.1.10 se cumple que $\nabla_{r_M} \circ \rho_M^{\lambda^{-1}} = \rho_M^{\lambda^{-1}}$ y $\psi_M^{\lambda} \circ \nabla_{r_M} = \psi_M^{\lambda}$, y por otra parte, razonando igual que en (4.8) se tiene también que

$$(M\otimes t'_{D,D})\circ(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes\nabla_{r_M}) = (\nabla_{r_M}\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})\circ(r'_M\otimes D). \quad (4.9)$$

La sexta igualdad es consecuencia de (a1) de la Definición 1.2.4 y (b3-3) de la Definición 1.2.9, la séptima es cierta por la Proposición 2.1.19 y (2.9), la octava se deduce aplicando primero (b2-1), luego (2.9) y finalmente (b3-3) de la Definición 1.2.9 y (1.2), mientras que en la novena se usa (b1-1) de la Definición 1.2.9 y la igualdad $\psi_M^{\lambda} \circ \nabla_{r_M} = \psi_M^{\lambda}$.

La demostración del apartado (iii) a partir del (i) sigue el mismo esquema y aplica las mismas técnicas, la diferencia estriba en que ahora se componen las expresiones correspondientes con s'_M y s_M respectivamente en vez de con r_M y r'_M.

A la vista de lo anterior, para deducir (iv) y (v) a partir de (i), basta con probar que (ii) implica (iv) y (iii) implica (v). Teniendo esto en mente, usando (yd1-dd), las definiciones de ψ_M^{λ} y $\rho_M^{\lambda^{-1}}$, junto con la anti(co)multiplicatividad del antípodo y de su inverso resulta:

$$\rho'_M$$
$$= (M \otimes \lambda_D) \circ \rho_M^{\lambda^{-1}}$$
$$= (\psi_M^{\lambda} \otimes (\lambda_D \circ \mu_D)) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\rho_M^{\lambda^{-1}} \otimes (\delta_D \circ \eta_D))$$

$$= (\psi_M \otimes (\mu_D \circ t_{D,D})) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\rho'_M \otimes ((\lambda_D \otimes \lambda_D) \circ \delta_D \circ \eta_D))$$

$$= (\psi_M \otimes \mu_{D^{\mathrm{coop}^{\mathrm{op}}}}) \circ (M \otimes t_{D,D} \otimes D) \circ (\rho'_M \otimes (\delta_{D^{\mathrm{coop}^{\mathrm{op}}}} \circ \eta_{D^{\mathrm{coop}^{\mathrm{op}}}})).$$

La condición (yd2-dd) requerida en (iii) se deduce inmediatamente componiendo en la igualdad de (yd2-dd) referida al triple $(M, \psi_M^{\lambda}, \rho_M^{\lambda^{-1}})$ con λ_D^{-1} por la derecha y λ_D por la izquierda y aplicando después la anti(co)multiplicatividad del antípodo y su inverso junto con la Proposición 2.1.17.

Procediendo análogamente se prueba que (iii) implica (v).

Para demostrar que (i) implica (vi), la condición (yd1-id) para (M, φ_M, ρ'_M) con respecto al (M, D)-OD (s'_M, s_M, r'_M, r_M) se obtiene como sigue:

$$(\varphi_M \otimes \mu_{D^{\mathrm{coop}}}) \circ (D \otimes r'_M \otimes D) \circ ((\delta_{D^{\mathrm{coop}}} \circ \eta_{D^{\mathrm{coop}}}) \otimes \rho'_M)$$

$$= (\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes r'_M \otimes D) \circ ((t'_{D,D} \circ \delta_D \circ \eta_D) \otimes (r'_M \circ \varrho_M))$$

$$= (\varphi_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (D \otimes \mu_D \otimes M) \circ ((t'_{D,D} \circ \delta_D \circ \eta_D) \otimes \varrho_M)$$

$$= (\varphi_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ ((t'_{D,D} \circ t_{D,D}) \otimes M) \circ (D \otimes \mu_D \otimes M)$$

$$\circ ((t'_{D,D} \circ \delta_D \circ \eta_D) \otimes \varrho_M)$$

$$= r'_M \circ (D \otimes \varphi_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes \mu_D \otimes M) \circ ((t'_{D,D} \circ \delta_D \circ \eta_D) \otimes \varrho_M)$$

$$= r'_M \circ (\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (t_{D,D} \otimes D \otimes M) \circ ((t'_{D,D} \circ \delta_D \circ \eta_D) \otimes \varrho_M)$$

$$= r'_M \circ \varrho_M$$

$$= \rho'_M,$$

donde la primera igualdad es consecuencia de las definiciones de ρ'_M y $\delta_{D^{\mathrm{coop}}}$, la segunda se sigue por (e4-2) de la Definición 2.1.1, la tercera por (1.2) y (b1-3) de la Definición 1.2.9 y (a3-2) de la Definición 1.2.4. La cuarta igualdad se cumple por la compatibilidad del operador débil con la estructura de módulo, y la quinta por (b3-2) de la Definición 1.2.9; la sexta por (1.2), (b2-1) de la Definición 1.2.9 y la condición (yd1-ii). Finalmente, la séptima es cierta por la definición de ρ'_M.

En cuanto a la condición (yd2-id), componiendo con r'_M a cada lado de la igualdad asumida en (yd2-ii) para $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ con respecto al (M, D)-OD (r_M, r'_M, s_M, s'_M) se obtiene:

$$r'_M \circ (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \otimes (\delta_D \otimes M)$$

$$= (M \otimes \mu_D) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes \nabla_{r_M}) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \otimes (\delta_D \otimes M)$$

$$= (M \otimes \mu_D) \circ (r'_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes (r'_M \circ (\eta_D \otimes M)) \otimes D)$$

$$\circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \otimes (\delta_D \otimes M)$$

$$= (M \otimes \mu_D) \circ (r'_M \otimes D) \circ ((\mu_D \circ (\eta_D \otimes D)) \otimes M \otimes D)$$

$$\circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ ((t_{D,D} \circ t'_{D,D} \circ \delta_D) \otimes M)$$

$$= (M \otimes \mu_D) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (t_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes (\varrho_M \circ \varphi_M))$$

$$\circ (\delta_{D^{\mathrm{coop}}} \otimes M)$$

$$= (M \otimes (\mu_{D^{\mathrm{coop}}} \circ t'_{D^{\mathrm{coop}}, D^{\mathrm{coop}}})) \circ (s_M \otimes D) \circ (D \otimes (\rho'_M \circ \varphi_M))$$

$$\circ (\delta_{D^{\mathrm{coop}}} \otimes M),$$

siendo la primera igualdad consecuencia de (e4-2) de la Definición 2.1.1, la segunda de (e3) de la Definición 2.1.1; la tercera de (b2-1) de la Definición 1.2.9, (1.2), de la asociatividad de μ_D y (e4). La cuarta es cierta por la compatibilidad del operador débil con la estructura de (co)módulo, las propiedades de η_D y la definición de $\delta_{D^{\mathrm{coop}}}$. La quinta se sigue por (e2-1) de la Definición 2.1.1, la definición de $\mu_{D^{\mathrm{coop}}}$ y la igualdad $t'_{D^{\mathrm{coop}}, D^{\mathrm{coop}}} = t_{D,D}$.

Por otra parte:

$$r'_M \circ (\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M)$$

$$= (M \otimes \mu_D) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (D \otimes D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M)$$

$$= (M \otimes \mu_D) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes \varphi_M \otimes D) \circ (D \otimes D \otimes r'_M)$$

$$\circ (D \otimes (t'_{D,D} \circ t_{D,D}) \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M)$$

$$= (\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes r'_M \otimes D) \circ (t'_{D,D} \otimes r'_M) \circ (D \otimes \nabla_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M)$$

$$= (\varphi_M \otimes \mu_{D^{\mathrm{coop}}}) \circ (D \otimes r'_M \otimes D) \circ (\delta_{D^{\mathrm{coop}}} \otimes \rho'_M),$$

quedando demostrado (yd2-id) en (vi).

Para probar que el apartado (i) también implica el (vii) se sigue el mismo procedimiento. La diferencia estriba en que para obtener la condición (yd2-di), en este caso, se componen ambos lados de la igualdad (yd2-ii) en (i) con s'_M en vez de hacerlo con r'_M como en el caso anterior.

Para obtener el apartado (viii) a partir del (i) probaremos en primer lugar (yd2-id). En efecto:

$$(M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes (\rho_M^{\lambda^{-1}} \circ \varphi_M)) \circ (\delta_D \otimes M)$$

$$= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes \lambda_D^{-1}) \circ (D \otimes r'_M) \circ (D \otimes (\varrho_M \circ \varphi_M)) \circ (\delta_D \otimes M)$$

$$= r'_M \circ ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes M) \circ (D \otimes \lambda_D^{-1} \otimes M) \circ (D \otimes (\varrho_M \circ \varphi_M)) \circ (\delta_D \otimes M)$$

$$= r'_M \circ ((\mu_D \circ t'_{D,D}) \otimes M) \circ ((\lambda_D^{-1} \circ \lambda_D) \otimes (\lambda_D^{-1} \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes \mu_D \otimes r_M)$$
$$\circ (D \otimes D \otimes D \otimes \varphi_M \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes D \otimes t_{D,D} \otimes M \otimes D) \circ (D \otimes \delta_D \otimes \varrho_M \otimes D)$$
$$\circ (\delta_D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$

$$= r'_M \circ ((\lambda_D^{-1} \circ \mu_D) \otimes M) \circ (\mu_D \otimes r_M) \circ (D \otimes D \otimes \varphi_M \otimes \lambda_D)$$
$$\circ (\Pi_D^R \otimes t_{D,D} \otimes M \otimes D) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$

$$= r'_M \circ ((\lambda_D^{-1} \circ \mu_D) \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ (D \otimes \varphi_M \otimes \lambda_D) \circ (t_{D,D} \otimes M \otimes D) \circ$$
$$(D \otimes \varrho_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$

$$= (M \otimes (\lambda_D^{-1} \circ \mu_D)) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes \nabla_{r_M}) \circ (D \otimes \varphi_M \otimes \lambda_D) \circ (t_{D,D} \otimes M \otimes D)$$
$$\circ (D \otimes \varrho_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$

$$= (M \otimes (\lambda_D^{-1} \circ \mu_D)) \circ (r'_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes r'_M \otimes D) \circ (D \otimes \eta_D \otimes \varphi_M \otimes \lambda_D)$$
$$\circ (t_{D,D} \otimes M \otimes D) \circ (D \otimes \varrho_M \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$

$$= (M \otimes (\lambda_D^{-1} \circ \mu_D)) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes \varphi_M \otimes \lambda_D) \circ (t_{D,D} \otimes M \otimes D) \circ (D \otimes \varrho_M \otimes D)$$

$$\circ(D\otimes s_M)\circ(\delta_D\otimes M)$$

$$=(\varphi_M\otimes(\lambda_D^{-1}\circ\mu_D))\circ(D\otimes r'_M\otimes\lambda_D)\circ(\nabla_{D,D}\otimes s_M)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M)$$

$$\circ(\delta_D\otimes\varrho_M)$$

$$=(\varphi_M\otimes(\mu_D\circ t'_{D,D}\circ(\lambda_D^{-1}\otimes\lambda_D^{-1})))\circ(D\otimes r'_M\otimes\lambda_D)\circ(D\otimes D\otimes s_M)$$

$$\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M)\circ(\delta_D\otimes\varrho_M)$$

$$=(\varphi_M\otimes(\mu_D\circ\nabla_{D,D}))\circ(D\otimes s_M\otimes D)\circ(\delta_D\otimes\rho_M^{\lambda^{-1}})$$

$$=(\varphi_M\otimes\mu_D)\circ(D\otimes s_M\otimes D)\circ(\delta_D\otimes\rho_M^{\lambda^{-1}}),$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la definición de $\rho_M^{\lambda^{-1}}$, la segunda se obtiene gracias a (e1) y (e4-2) de la Definición 2.1.1 y la Proposición 2.1.17, en la tercera se aplica (yd3-ii), la coasociatividad de δ_D y la composición con la unidad. La cuarta igualdad es consecuencia de la antimultiplicatividad de λ_D^{-1}, la asociatividad de μ_D, la coasociatividad de δ_Dy (1.29), mientras que la quinta lo es de la igualdad:

$$(\mu_D\otimes\varphi_M)\circ(\Pi_D^R\otimes t_{D,D}\otimes M)\circ(\delta_D\otimes\varrho_M)=(D\otimes\varphi_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes\varrho_M), \tag{4.10}$$

que a su vez se deduce como sigue:

$$(\mu_D\otimes\varphi_M)\circ(\Pi_D^R\otimes t_{D,D}\otimes M)\circ(\delta_D\otimes\varrho_M)$$

$$=(\mu_D\otimes\varphi_M)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes\mu_D\otimes\varrho_M)\circ(t_{D,D}\otimes D\otimes M)$$

$$\circ(D\otimes(\delta_D\circ\eta_D)\otimes M)$$

$$=(\mu_D\otimes\varphi_M)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes\varphi_M)\circ(t_{D,D}\otimes t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes(\delta_D\circ\eta_D)\otimes\varrho_M)$$

$$=(D\otimes\varphi_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes((\mu_D\otimes\varphi_M)\circ(D\otimes t_{D,D}\otimes M)$$

$$\circ((\delta_D\circ\eta_D)\otimes\varrho_M)))$$

$$=(D\otimes\varphi_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes\varrho_M),$$

donde la primera igualdad resulta de (1.44), la segunda de (b3-1) de la Definición 1.2.9 y la condición de módulo, la tercera de (b3-2) y la cuarta de (yd1-ii).

Retomando la línea principal de la demostración, en la sexta igualdad se usa la Proposición 2.1.17, (e4-2) de la Definición 2.1.1 y la definición de ∇_{r_M}, y en la séptima (e3-1) de la Definición 2.1.1; en la octava la asociatividad de μ_D, (e4-2) y las propiedades de η_D. La novena igualdad se deduce por la compatibilidad del operador débil con las estructuras de (co)módulo y (1.2), la décima por la antimultiplicatividad de λ_D^{-1}, (a2-2) de la Definición 1.2.4 y (b2-1) de la Definición 1.2.9. La undécima igualdad es consecuencia de (e2-1) de la Definición 2.1.1, (1.54) y (1.2), y la duodécima de (b1-1) de la Definición 1.2.9.

Una vez obtenido (yd2-id) probamos (yd1-id). En efecto:

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_M \otimes \mu_D) \circ (D \otimes s_M \otimes D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \rho_M^{\lambda^{-1}}) \\
&= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (D \otimes \lambda_D^{-1} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M) \\
&\quad \circ (D \otimes \varphi_M) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes M) \\
&= (M \otimes (\mu_D \circ t'_{D,D})) \circ (r'_M \otimes D) \circ (D \otimes r'_M) \circ (D \otimes \lambda_D^{-1} \otimes M) \circ (D \otimes \varrho_M) \\
&\quad \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes M) \circ \varrho_M \\
&= r'_M \circ ((\mu_D \circ t'_{D,D} \circ (\overline{\Pi}_D^L \otimes \lambda_D^{-1}) \circ \delta_D) \otimes M) \circ \varrho_M \\
&= r'_M \circ ((\mu_D \circ t'_{D,D} \circ ((\lambda_D^{-1} \circ \Pi_D^L) \otimes \lambda_D^{-1}) \circ \delta_D) \otimes M) \circ \rho_M \\
&= \rho_M^{\lambda^{-1}},
\end{aligned}
$$

donde en la primera igualdad se aplica la definición de $\rho_M^{\lambda^{-1}}$ y la condición (yd2-id) para (viii), la segunda se sigue de (vi) de la Observación 3.1.8, la tercera de la condición de comódulo, (e1) y (e4-2) de la Definición 2.1.1; la cuarta de (1.34); la quinta de la antimultiplicatividad de λ_D^{-1} y (1.30).

Finalmente, se prueba que (viii) implica (ix). Esto último equivale a probar que si $(M, \varphi_M, \rho_M) \in {}_D\mathcal{YD}^D$ entonces $(M, \psi_M^{\lambda^{-1}}, \varrho_M^{\lambda}) \in {}^D\mathcal{YD}_D$, y puede deducirse siguiendo el mismo argumento que el usado para obtener (ii) a partir de (i). En este caso componemos en la igualdad (yd2-id) para $(M, \varphi_M, \rho_M) \in$

${}_{D}\mathcal{YD}^{D}$ con λ_D y λ_D^{-1}, obteniendo dos expresiones iguales. Después, componiendo cada una de ellas con s'_M y r_M resulta precisamente la condición (yd2-di) para $(M, \psi_M^{\lambda^{-1}}, \varrho_M^{\lambda}) \in {}^{D}\mathcal{YD}_{D}$. □

Usando la notación introducida en las Proposiciones 2.2.8 – 2.2.16 para designar transformaciones en las estructuras de (co)módulo se tiene el resultado siguiente.

Corolario 4.2.2. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Las siguientes transformaciones son funtores que definen equivalencias de categorías:*

(i) $F : {}_{D}^{D}\mathcal{YD} \to \mathcal{YD}_{D}^{D}$ *dado por* $F(M, \varphi_M, \varrho_M) = (M, \psi_M^{\lambda}, \rho_M^{\lambda^{-1}})$ *y* $F(f) = f$, *con inverso* $G : \mathcal{YD}_{D}^{D} \to {}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ *dado por* $G(M, \psi_M, \rho_M) = (M, \varphi_M^{\lambda^{-1}}, \varrho_M^{\lambda})$ *y* $G(f) = f$.

(ii) $F : {}_{D}^{D}\mathcal{YD} \to \mathcal{YD}_{D}^{D}$ *dado por* $F(M, \varphi_M, \varrho_M) = (M, \psi_M^{\lambda^{-1}}, \rho_M^{\lambda})$ *y* $F(f) = f$, *con inverso* $G : \mathcal{YD}_{D}^{D} \to {}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ *dado por* $G(M, \psi_M, \rho_M) = (M, \varphi_M^{\lambda}, \varrho_M^{\lambda^{-1}})$ *y* $G(f) = f$.

(iii) $F : {}_{D}^{D}\mathcal{YD} \to \mathcal{YD}_{D^{coop^{op}}}^{D^{coop^{op}}}$ *dado por* $F(M, \varphi_M, \varrho_M) = (M, \psi_M, \rho'_M)$ *y* $F(f) = f$, *con inverso* $G : \mathcal{YD}_{D^{coop^{op}}}^{D^{coop^{op}}} \to {}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ *dado por* $G(M, \psi_M, \rho_M) = (M, \varphi'_M, \varrho_M)$ *y* $G(f) = f$.

(iv) $F : {}_{D}^{D}\mathcal{YD} \to \mathcal{YD}_{D^{op^{coop}}}^{D^{op^{coop}}}$ *dado por* $F(M, \varphi_M, \varrho_M) = (M, \psi'_M, \rho_M)$ *y* $F(f) = f$, *con inverso* $G : \mathcal{YD}_{D^{op^{coop}}}^{D^{op^{coop}}} \to {}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ *dado por* $G(M, \psi_M, \rho_M) = (M, \varphi_M, \varrho'_M)$ *y* $G(f) = f$.

(v) $F : {}_{D}^{D}\mathcal{YD} \to {}_{D^{coop}}\mathcal{YD}^{D^{coop}}$ *dado por* $F(M, \varphi_M, \varrho_M) = (M, \varphi_M, \rho'_M)$ *y* $F(f) = f$, *con inverso* $G : {}_{D^{coop}}\mathcal{YD}^{D^{coop}} \to {}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ *dado por* $G(M, \varphi_M, \rho_M) = (M, \varphi_M, \varrho'_M)$ *y* $G(f) = f$.

(vi) $F : {}_{D}^{D}\mathcal{YD} \to {}^{D^{op}}\mathcal{YD}_{D^{op}}$ *dado por* $F(M, \varphi_M, \varrho_M) = (M, \psi'_M, \varrho_M)$ *y* $F(f) = f$, *con inverso* $G : {}^{D^{op}}\mathcal{YD}_{D^{op}} \to {}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ *dado por* $G(M, \psi_M, \rho_M) = (M, \psi'_M, \varrho_M)$ *y* $G(f) = f$.

(vii) $F : {}_{D}^{D}\mathcal{YD} \to {}_{D}\mathcal{YD}^{D}$ *dado por* $F(M, \varphi_M, \varrho_M) = (M, \varphi_M, \rho_M^{\lambda^{-1}})$ *y* $F(f) = f$, *con inverso* $G : {}_{D}\mathcal{YD}^{D} \to {}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ *dado por* $G(M, \psi_M, \rho_M) = (M, \psi_M, \rho_M^{\lambda})$ *y* $G(f) = f$.

(viii) $F : {}_D^D\mathcal{YD} \to {}^D\mathcal{YD}_D$ *dado por* $F(M, \varphi_M, \varrho_M) = (M, \psi_M^{\lambda^{-1}}, \varrho_M)$ *y* $F(f) = f$*, con inverso* $G : {}^D\mathcal{YD}_D \to_D^D \mathcal{YD}$ *dado por* $G(M, \psi_M, \rho_M) = (M, \varphi_M^{\lambda}, \varrho_M)$ *y* $G(f) = f$*.*

Para concluir el capítulo se expone una aplicación del Teorema 4.2.1. En la Proposición 3.3.11 se demostró que los triples $(\Omega^a(D), \varphi_{\Omega^a(D)}, \rho_{\Omega^a(D)})$ y $(\Omega^c(D), \psi_{\Omega^c(D)}, \varrho_{\Omega^c(D)})$ eran objetos en la categoría ${}_D^D\mathcal{YD}$. Por lo tanto, el Teorema 4.2.1 implica lo siguiente:

Corolario 4.2.3. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Se cumple que:*

(i) $(\Omega^a(D), \psi_{\Omega^a(D)}^{\lambda}, \rho_{\Omega^a(D)}^{\lambda^{-1}}) \in \mathcal{YD}_D^D$,

(ii) $(\Omega^a(D), \psi_{\Omega^a(D)}^{\lambda^{-1}}, \rho_{\Omega^a(D)}^{\lambda}) \in \mathcal{YD}_D^D$,

(iii) $(\Omega^a(D), \psi_{\Omega^a(D)}, \rho'_{\Omega^a(D)}) \in \mathcal{YD}_{D^{coop^{op}}}^{D^{coop^{op}}}$,

(iv) $(\Omega^a(D), \psi'_{\Omega^a(D)}, \rho_{\Omega^a(D)}) \in \mathcal{YD}_{D^{op^{coop}}}^{D^{op^{coop}}}$,

(v) $(\Omega^a(D), \varphi_{\Omega^a(D)}, \rho'_{\Omega^a(D)}) \in_{D^{coop}} \mathcal{YD}^{D^{coop}}$,

(vi) $(\Omega^a(D), \psi'_{\Omega^a(D)}, \varrho_{\Omega^a(D)}) \in_{D^{op}} \mathcal{YD}_{D^{op}}$,

(vii) $(\Omega^a(D), \varphi_{\Omega^a(D)}, \rho_{\Omega^a(D)}^{\lambda^{-1}}) \in {}_D\mathcal{YD}^D$,

(viii) $(\Omega^a(D), \psi_{\Omega^a(D)}^{\lambda^{-1}}, \varrho_{\Omega^a(D)}) \in {}^D\mathcal{YD}_D$,

donde

$$\psi_{\Omega^a(D)}^{\lambda} := p_D^a \circ \varphi_D \circ t_{D,D} \circ (i_D^a \otimes \lambda_D), \quad \rho_{\Omega^a(D)}^{\lambda^{-1}} := (p_D^a \otimes \lambda_D^{-1}) \circ t'_{D,D} \circ \delta_D \circ i_D^a,$$

$$\psi_{\Omega^a(D)}^{\lambda^{-1}} := p_D^a \circ \varphi_D \circ t'_{D,D} \circ (i_D^a \otimes \lambda_D^{-1}), \quad \rho_{\Omega^a(D)}^{\lambda} := (p_D^a \otimes \lambda_D^{-1}) \circ t_{D,D} \circ \delta_D \circ i_D^a,$$

$$\psi_{\Omega^a(D)} := p_D^a \circ \varphi_D \circ t_{D,D} \circ (i_D^a \otimes D), \quad \rho'_{\Omega^a(D)} := ((p_D^a \otimes D)) \circ t'_{D,D} \circ \delta_D \circ i_D^a,$$

$$\psi'_{\Omega^a(D)} := p_D^a \circ \varphi_D \circ t'_{D,D} \circ (i_D^a \otimes D), \quad \rho_{\Omega^a(D)} := (p_D^a \otimes D) \circ t_{D,D} \circ \delta_D \circ i_D^a.$$

Corolario 4.2.4. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Se cumple que:*

(i) $(\Omega^c(D), \psi^{\lambda}_{\Omega^c(D)}, \rho^{\lambda^{-1}}_{\Omega^c(D)}) \in \mathcal{YD}^D_D$,

(ii) $(\Omega^c(D), \psi^{\lambda^{-1}}_{\Omega^c(D)}, \rho^{\lambda}_{\Omega^c(D)}) \in \mathcal{YD}^D_D$,

(iii) $(\Omega^c(D), \psi_{\Omega^c(D)}, \rho'_{\Omega^c(D)}) \in \mathcal{YD}^{D^{coop^{op}}}_{D^{coop^{op}}}$,

(iv) $(\Omega^c(D), \psi'_{\Omega^c(D)}, \rho_{\Omega^c(D)}) \in \mathcal{YD}^{D^{op^{coop}}}_{D^{op^{coop}}}$,

(v) $(\Omega^c(D), \varphi_{\Omega^c(D)}, \rho'_{\Omega^c(D)}) \in_{D^{coop}} \mathcal{YD}^{D^{coop}}$,

(vi) $(\Omega^c(D), \psi'_{\Omega^c(D)}, \varrho_{\Omega^c(D)}) \in_{D^{op}} \mathcal{YD}_{D^{op}}$,

(vii) $(\Omega^c(D), \varphi_{\Omega^c(D)}, \rho^{\lambda^{-1}}_{\Omega^c(D)}) \in {}_D\mathcal{YD}^D$,

(viii) $(\Omega^c(D), \psi^{\lambda^{-1}}_{\Omega^c(D)}, \varrho_{\Omega^c(D)}) \in {}^D\mathcal{YD}_D$,

donde

$$\psi^{\lambda}_{\Omega^c(D)} := p^c_D \circ \mu_D \circ t_{D,D} \circ (i^c_D \otimes \lambda_D), \quad \rho^{\lambda^{-1}}_{\Omega^c(D)} := (p^c_D \otimes \lambda^{-1}_D) \circ t'_{D,D} \circ \varrho_D \circ i^c_D,$$

$$\psi^{\lambda^{-1}}_{\Omega^c(D)} := p^c_D \circ \mu_D \circ t'_{D,D} \circ (i^c_D \otimes \lambda^{-1}_D), \quad \rho^{\lambda}_{\Omega^c(D)} := (p^c_D \otimes \lambda^{-1}_D) \circ t_{D,D} \circ \varrho_D \circ i^c_D,$$

$$\psi_{\Omega^c(D)} := p^c_D \circ \mu_D \circ t_{D,D} \circ (i^c_D \otimes D), \quad \rho'_{\Omega^c(D)} := ((p^c_D \otimes D)) \circ t'_{D,D} \circ \varrho_D \circ i^c_D,$$

$$\psi'_{\Omega^c(D)} := p^c_D \circ \mu_D \circ t'_{D,D} \circ (i^c_D \otimes D), \quad \rho_{\Omega^c(D)} := (p^c_D \otimes D) \circ t_{D,D} \circ \varrho_D \circ i^c_D.$$

Capítulo 5

Proyecciones sobre un AHTD

En este capítulo se muestra cómo ciertos resultados obtenidos para proyecciones de álgebras de Hopf y álgebras de Hopf débiles son en realidad casos particulares de otros que se cumplen en el contexto monoidal general de las AHTD. Para ello, en la primera sección se introduce la categoría denotada por $\mathcal{P}roj(D)$ de las proyecciones sobre un AHTD D probándose además que a partir de una de tales proyecciones es posible definir un objeto B_D que admite estructura de (co)álgebra y pertenece además a la categoría ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$, existiendo un funtor $F : \mathcal{P}roj(D) \longrightarrow {}^{D}_{D}\mathcal{Y}D$. Haciendo uso de esto, en la segunda sección, se expone cómo el concepto de operador débil es un vínculo entre las nociones de operador Yang-Baxter débil y entrelazamiento débil. La tercera sección centra su atención en la descripción de la estructura de AHTD de B_D. Finalmente, en la cuarta sección se aplican estos los resultados generales al caso trenzado no simétrico, es decir, aquel donde el operador Yang-Baxter asociado al AHTD es la trenza de la categoría. Se expone cómo en esta situación particular, al igual que en el caso simétrico, la categoría ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$ es monoidal no estricta y existe una equivalencia categórica entre la categoría de las proyecciones sobre D y la de las álgebras de Hopf en ${}^{D}_{D}\mathcal{YD}$.

A lo largo de este capítulo, de nuevo $\mathcal{C}$ denota una categoría monoidal estricta donde todo idempotente rompe, y en la cuarta sección se asume además que es una categoría trenzada.

5.1. La categoría $\mathcal{P}roj(D)$

En esta sección se comienza introduciendo el concepto de proyección sobre un AHTD, para posteriormente probar que cada proyección tiene asociado un objeto universal con estructura de módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre D.

Definición 5.1.1. Sea D un AHTD. Una proyección sobre D es un triple (B, f, g) donde B es un AHTD y $f : D \to B$, $g : B \to D$ son morfismos de AHTD tales que $g \circ f = id_D$ y se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $(B \otimes (f \circ g)) \circ t_{B,B} = t_{B,B} \circ ((f \circ g) \otimes B)$,

(ii) $((f \circ g) \otimes B) \circ t_{B,B} = t_{B,B} \circ (B \otimes (f \circ g))$.

Un morfismo entre dos proyecciones (B, f, g) y (B', f', g') sobre D es un morfismo de AHTD $h : B \to B'$ tal que $h \circ f = f'$ y $g' \circ h = g$. Se dice que dos proyecciones (B, f, g) y (B', f', g') son isomorfas si existe un isomorfismo $h : B \to B'$ de AHTD entre ellas. La clase de proyecciones sobre D junto con los morfismos entre proyecciones forman una categoría a la que se denotará por $\mathcal{P}roj(D)$.

Esta definición se particulariza en el caso trenzado en la introducida por Alonso, Fernández y González en [4], tomando como operador Yang-Baxter débil $t_{D,D}$ la propia trenza de la categoría. Nótese que en estas condiciones las igualdades (i) y (ii) se cumplen por la naturalidad de la trenza.

Observación 5.1.2. En el presente contexto de álgebras de Hopf trenzadas débiles, el cumplimiento simultáneo de las condiciones (i) y (ii) de la Definición 5.1.1 para $t_{B,B}$ equivale a su cumplimiento para $t'_{B,B}$. En efecto, suponiendo (i), por (1.2), (a2-4) y (a3-2) de la Definición 1.2.4 resulta:

$$\nabla_{B,B} \circ (B \otimes (f \circ g)) \circ \nabla_{B,B}$$

$$= t_{B,B} \circ t'_{B,B} \circ (B \otimes (f \circ g)) \circ t_{B,B} \circ t'_{B,B}$$

$$= t_{B,B} \circ ((f \circ g) \otimes B) \circ t'_{B,B}$$

$$= (B \otimes (f \circ g)) \circ \nabla_{B,B};$$

y análogamente en virtud de (ii), (a2-4) y (a3-2) de la Definición 1.2.4 obtenemos que

$$\nabla_{B,B} \circ (B \otimes (f \circ g)) \circ \nabla_{B,B} = \nabla_{B,B} \circ (B \otimes (f \circ g)),$$

concluyéndose de esta forma que la igualdad

$$(B \otimes (f \circ g)) \circ \nabla_{B,B} = \nabla_{B,B} \circ (B \otimes (f \circ g)) \tag{5.1}$$

es cierta.

De modo análogo se obtiene

$$((f \circ g) \otimes B) \circ \nabla_{B,B} = \nabla_{B,B} \circ ((f \circ g) \otimes B). \tag{5.2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
&(B \otimes (f \circ g)) \circ t'_{B,B} \\
&= (B \otimes (f \circ g)) \circ \nabla_{B,B} \circ t'_{B,B} \\
&= t'_{B,B} \circ t_{B,B} \circ (B \otimes (f \circ g)) \circ t'_{B,B} \\
&= t'_{B,B} \circ ((f \circ g) \otimes B) \circ t_{B,B} \circ t'_{B,B} \\
&= t'_{B,B} \circ ((f \circ g) \otimes B) \circ \nabla_{B,B} \\
&= t'_{B,B} \circ ((f \circ g) \otimes B),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue por (a3-2) de la Definición 1.2.4, la segunda por (5.1) y (1.2), la tercera por la condición (ii), la cuarta por (1.2) y la última por (5.2) y (a2-3) de la Definición 1.2.4.

Argumentando del mismo modo se probaría que $((f \circ g) \otimes B) \circ t'_{B,B} = t'_{B,B} \circ (B \otimes (f \circ g))$.

La implicación opuesta resulta aplicando los mismos argumentos, sin más que intercambiar los roles de $t_{B,B}$ y $t'_{B,B}$.

Observación 5.1.3. Puesto que en la definición de proyección se requiere que $g \circ f = id_D$, como f y g son además por hipótesis morfismos de AHTD, entonces componiendo con $f \otimes B$ o $B \otimes f$ y $g \otimes B$ o $B \otimes g$ en ambos lados de las igualdades incluidas en las condiciones (i) y (ii) de la Definición 5.1.1, resulta:

$$(g \otimes B) \circ t_{B,B} \circ (f \otimes B) = (D \otimes f) \circ t_{D,D} \circ (D \otimes g) \tag{5.3}$$

y

$$(B \otimes g) \circ t_{B,B} \circ (B \otimes f) = (f \otimes D) \circ t_{D,D} \circ (g \otimes D). \tag{5.4}$$

En virtud de la Observación 5.1.2, realizando los mismos razonamientos sobre $t'_{D,D}$ y $t'_{B,B}$ se tienen también las igualdades análogas involucrando a estos dos operadores Yang-Baxter débiles.

Observación 5.1.4. Nótese que si $(B, f, g) \in |\mathcal{P}roj(D)|$ entonces, por ser f y g morfismos de AHTD se tiene que

$$f \circ \Pi_D^L \circ g = \Pi_B^L, \quad f \circ \Pi_D^R \circ g = \Pi_B^R, \quad f \circ \overline{\Pi}_D^L \circ g = \overline{\Pi}_B^L, \quad f \circ \overline{\Pi}_D^R \circ g = \overline{\Pi}_B^R,$$

$$g \circ \Pi_B^L \circ f = \Pi_D^L, \quad g \circ \Pi_B^R \circ f = \Pi_D^R, \quad g \circ \overline{\Pi}_B^L \circ f = \overline{\Pi}_D^L, \quad g \circ \overline{\Pi}_B^R \circ f = \overline{\Pi}_D^R.$$

Además se puede comprobar que

$$\Pi_D^L \circ g = g \circ \Pi_B^L, \quad \Pi_D^R \circ g = g \circ \Pi_B^R, \quad \overline{\Pi}_D^L \circ g = g \circ \overline{\Pi}_B^L, \quad \overline{\Pi}_D^R \circ g = g \circ \overline{\Pi}_B^R,$$

$$\Pi_B^L \circ f = f \circ \Pi_D^L, \quad \Pi_B^R \circ f = f \circ \Pi_D^R, \quad \overline{\Pi}_B^L \circ f = f \circ \overline{\Pi}_D^L, \quad \overline{\Pi}_B^R \circ f = f \circ \overline{\Pi}_D^R.$$

En el siguiente resultado veremos que toda proyección sobre un álgebra de Hopf trenzada débil da lugar a un morfismo idempotente.

Proposición 5.1.5. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ y (B, f, g) un objeto en $\mathcal{P}roj(D)$. El morfismo $q_D^B : B \longrightarrow B$ definido como*

$$q_D^B = id_B \wedge (f \circ \lambda_D \circ g)$$

es idempotente.

Prueba:
En efecto, usando la definición de q_D^B, la anti(co)multiplicatividad del antípodo (1.29), (1.30) y que (B, f, g) es un objeto en $\mathcal{P}roj(D)$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
& q_D^B \circ q_D^B \\
&= \mu_B \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \\
&\quad \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ \delta_B \\
&= \mu_B \circ (\mu_B \otimes (\mu_B \circ t_{B,B} \circ ((f \circ \lambda_D \circ g) \otimes (f \circ (\lambda_D \circ \lambda_D) \circ g)))) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \\
&\quad \circ (B \otimes B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g) \otimes B) \circ (\delta_B \otimes (t_{B,B} \circ \delta_B)) \circ \delta_B \\
&= \mu_B \circ (\mu_B \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (B \otimes (\mu_B \circ t_{B,B} \\
&\quad \circ ((f \circ \lambda_D \circ g) \otimes (f \circ \lambda_D \circ \lambda_D \circ g)) \otimes B)) \circ (B \otimes \delta_B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ (\delta_B \otimes B) \circ \delta_B \\
&= \mu_B \circ (\mu_B \otimes \Pi_B^L) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g) \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ (\delta_B \otimes B) \circ \delta_B \\
&= \mu_B \circ (\mu_B \otimes \Pi_B^L) \circ (B \otimes \delta_B) \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ \delta_B \\
&= \mu_B \circ (B \otimes (\Pi_B^L \wedge id_B)) \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ \delta_B \\
&= q_D^B.
\end{aligned}
$$

□

5.1.6. Como consecuencia de la proposición anterior y por tener la categoría $\mathcal{C}$ idempotentes escindidos, existen un objeto B_D, un epimorfismo $p_D^B : B \to B_D$, y un monomorfismo $i_D^B : B_D \to B$ tales que $q_D^B = i_D^B \circ p_D^B$ y $p_D^B \circ i_D^B = id_{B_D}$.

Proposición 5.1.7. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ y (B, f, g) un objeto en $\mathcal{P}roj(D)$. Se cumple que:*

$$
B_D \xrightarrow{i_D^B} B \underset{(B \otimes (\Pi_D^L \circ g)) \circ \delta_B}{\overset{(B \otimes g) \circ \delta_B}{\rightrightarrows}} B \otimes D
$$

es un diagrama de igualador.

Además

$$
B \otimes D \underset{\mu_B \circ (B \otimes (f \circ \Pi_D^L))}{\overset{\mu_B \circ (B \otimes f)}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{p_D^B} B_D
$$

es un diagrama de coigualador.

Prueba:
Por cumplirse que $p_D^B \circ i_D^B = id_{B_D}$, si el morfismo q_D^B iguala a $(B \otimes g) \circ \delta_B$ y $(B \otimes (\Pi_D^L \circ g)) \circ \delta_B$, obtendremos que i_D^B también lo hace. En efecto, por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}
&(B \otimes g) \circ \delta_B \circ q_D^B \\
&= (B \otimes g) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ \delta_B \\
&= (\mu_B \otimes (g \circ \mu_B)) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ (\delta_B \otimes (\delta_B \circ (f \circ \lambda_D \circ g))) \circ \delta_B \\
&= (\mu_B \otimes (\mu_D \circ (g \otimes g))) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ (\delta_B \otimes ((f \otimes f) \circ \delta_D \circ (\lambda_D \circ g))) \circ \delta_B \\
&= (\mu_B \otimes \mu_D) \circ (B \otimes f \otimes D \otimes (g \circ f)) \circ (B \otimes t_{D,D} \otimes D) \\
&\quad \circ (((B \otimes g) \circ \delta_B) \otimes ((\lambda_D \otimes \lambda_D) \circ t_{D,D} \circ \delta_D \circ g)) \circ \delta_B \\
&= (\mu_B \otimes \mu_D) \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D) \otimes D \otimes D) \circ (B \otimes ((t_{D,D} \otimes D) \\
&\quad \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (g \otimes (\lambda_D \circ g) \otimes g))) \circ (B \otimes \delta_B \otimes B) \circ (B \otimes \delta_B) \circ \delta_B \\
&= (\mu_B \otimes D) \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D) \otimes D) \circ (B \otimes t_{D,D}) \circ (B \otimes (\mu_D \circ (D \otimes \lambda_D) \circ \delta_D) \otimes D) \\
&\quad \circ (B \otimes g \otimes g) \circ (B \otimes \delta_B) \circ \delta_B \\
&= (\mu_B \otimes D) \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D) \otimes \Pi_D^L) \circ (B \otimes (t_{D,D} \circ (g \otimes g))) \circ (B \otimes \delta_B) \circ \delta_B,
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue por la definición de q_D^B, la segunda por (b4) de la Definición 1.2.9, la tercera por ser f morfismo de coálgebras y g morfismo de álgebras. La cuarta igualdad es consecuencia de la coasociatividad de δ_B, la anticomultiplicatividad del antípodo y la Observación (5.1.3). En la quinta se usa que g es un morfismo de coálgebras, (1.53) y (1.54); en la sexta (b3-1) de la Definición 1.2.9 y que g es un morfismo de coálgebras. En la séptima igualdad se aplica (1.29) y (1.35).

Por el otro lado, utilizando ahora el carácter idempotente de Π_D^L resulta:

$$\begin{aligned}
&(B \otimes g) \circ \delta_B \circ q_D^B \\
&= (\mu_B \otimes D) \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D) \otimes (\Pi_D^L \circ \Pi_D^L)) \circ (B \otimes (t_{D,D} \circ (g \otimes g))) \circ (B \otimes \delta_B) \circ \delta_B \\
&= (B \otimes (\Pi_D^L \circ g)) \circ \delta_B \circ q_D^B.
\end{aligned}$$

Si $r : M \to B$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $(B \otimes (\Pi_D^L \circ g)) \circ \delta_B \circ r = (B \otimes g) \circ \delta_B \circ r$, entonces $p_D^B \circ r$ es el único morfismo tal que $i_D^B \circ p_D^B \circ r = r$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
& i_D^B \circ p_D^B \circ r \\
&= \mu_B \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ \delta_B \circ r \\
&= \mu_B \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D \circ \Pi_D^L \circ g)) \circ \delta_B \circ r \\
&= \mu_B \circ (B \otimes (f \circ \Pi_D^R \circ \Pi_D^L \circ g)) \circ \delta_B \circ r \\
&= \mu_B \circ (B \otimes (f \circ \Pi_D^R \circ g)) \circ \delta_B \circ r \\
&= \mu_B \circ (B \otimes \Pi_B^R) \circ \delta_B \circ r \\
&= r,
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad es cierta por las propiedades de la escisión y la definición de q_D^B, la segunda y la cuarta por la hipótesis sobre r, la tercera por (1.33), la quinta por la Observación 5.1.4 y la sexta por (1.30).

En cuanto a la unicidad, si $s : M \to B_D$ satisface $i_D^B \circ s = r$, entonces $s = p_D^B \circ i_D^B \circ s = p_D^B \circ r$.

El carácter coigualador del segundo diagrama se prueba usando las mismas técnicas, pero con las propiedades de álgebra jugando el papel de las de coálgebra y viceversa. □

Proposición 5.1.8. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Si (B, f, g) es un objeto en $\mathcal{P}roj(D)$ entonces:*

(i) El triple $(B_D, \eta_{B_D} = p_D^B \circ \eta_B, \mu_{B_D} = p_D^B \circ \mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B))$ es un álgebra en $\mathcal{C}$.

(ii) El triple $(B_D, \varepsilon_{B_D} = \varepsilon_B \circ i_D^B, \delta_{B_D} = (p_D^B \otimes p_D^B) \circ \delta_B \circ i_D^B)$ es una coálgebra en $\mathcal{C}$.

Prueba:

Los morfismos η_{B_D} y μ_{B_D} son las factorizaciones respectivas de los morfismos η_B y $\mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B)$ a través del igualador i_D^B. A tenor de lo expuesto en la prueba de la Proposición 5.1.7, para ver que estos morfismos son las factorizaciones indicadas basta con comprobar que η_B y $\mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B)$ igualan los morfismos del diagrama. Para el primero de ellos, gracias a la Observación 5.1.4 y (1.47) se tiene que

$$(B \otimes (\Pi_D^L \circ g)) \circ \delta_B \circ \eta_B = (B \otimes (g \circ \Pi_B^L)) \circ \delta_B \circ \eta_B = (B \otimes g) \circ \delta_B \circ \eta_B.$$

El segundo también iguala los morfismos deseados ya que:

$$\begin{aligned}
&(B \otimes g) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B) \\
&= (B \otimes g) \circ (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B)) \\
&= (\mu_B \otimes (\mu_D \circ (g \otimes (\Pi_D^L \circ g)))) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B)) \\
&= (\mu_B \otimes (\Pi_D^L \circ \mu_D \circ (D \otimes \Pi_D^L))) \circ (B \otimes B \otimes g \otimes g) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \\
&\quad \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B)) \\
&= (\mu_B \otimes (\Pi_D^L \circ \mu_D)) \circ (B \otimes B \otimes g \otimes g) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B)) \\
&= (B \otimes (\Pi_D^L \circ g)) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue por (b4) de la Definición 1.2.9, la segunda y la cuarta por ser g morfismo de álgebras e i_D^B un morfismo igualador; la tercera es consecuencia de (1.52). Finalmente, la quinta se sigue por ser g un morfismo de álgebras.

Una vez conocido que estos morfismos son las factorizaciones indicadas es sencillo demostrar que $(B_D, \eta_{B_D}, \mu_{B_D})$ es un álgebra. En efecto, tenemos que

$$i_D^B \circ \mu_{B_D} \circ (B_D \otimes \eta_{B_D}) = \mu_B \circ (i_D^B \otimes (i_D^B \circ \eta_{B_D})) = \mu_B \circ (i_D^B \otimes \eta_B) = i_D^B,$$

y por ser i_D^B un monomorfismo resulta la propiedad de la unidad por un lado, siendo la prueba por el otro lado similar. En cuanto a la asociatividad, aplicando la propiedad del morfismo de factorización y la asociatividad de μ_D se tiene:

$$\begin{aligned}
&i_D^B \circ \mu_{B_D} \circ (B_D \otimes \mu_{B_D}) \\
&= \mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B) \circ (B_D \otimes \mu_{B_D})
\end{aligned}$$

$$= \mu_B \circ (i_D^B \otimes (\mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B)))$$

$$= \mu_B \circ (\mu_B \circ B) \circ (i_D^B \otimes i_D^B \otimes i_D^B)$$

$$= \mu_{B_D} \circ (i_D^B \otimes (i_D^B \circ \mu_{B_D}))$$

$$= i_D^B \circ \mu_{B_D} \circ (\mu_{B_D} \otimes B_D),$$

y por ser i_D^B un monomorfismo resulta la coasociatividad para μ_{B_D}.

La prueba del apartado (ii) se realiza usando las mismas técnicas sin más que intercambiar entre sí las propiedades de álgebra y las de coálgebra. Se demuestra primero que ε_{B_D} y δ_{B_D} son las factorizaciones respectivas a través del coigualador p_D^B de los morfismos ε_B y $(p_D^B \otimes p_D^B) \circ \delta_B$, para posteriormente comprobar que $(B_D, \varepsilon_{B_D}, \delta_{B_D})$ es una coálgebra usando que p_D^B es un epimorfismo. $\square$

Observación 5.1.9. Como consecuencia directa de la proposición anterior se deduce que:

(i) $\delta_{B_D} \circ \mu_{B_D} = (p_D^B \otimes p_D^B) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B)$,

(ii) $\delta_{B_D} \circ \mu_{B_D} = (p_D^B \otimes p_D^B) \circ \delta_B \circ q_D^B \circ \mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B)$,

(iii) $\delta_B \circ \mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B) = \delta_B \circ i_D^B \circ \mu_{B_D} = \delta_B \circ q_D^B \circ \mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B)$,

(iv) $(p_D^B \otimes p_D^B) \circ \delta_B \circ \mu_B = \delta_{B_D} \circ p_D^B \circ \mu_B = (p_D^B \otimes p_D^B) \circ \delta_B \circ q_D^B \circ \mu_B$.

Lema 5.1.10. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ y (B, f, g) un objeto en $\mathcal{P}roj(D)$. Se cumple:*

(i) $p_D^B \circ \mu_B \circ (B \circ q_D^B) = p_D^B \circ \mu_B$,

(ii) $(B \otimes q_D^B) \circ \delta_B \circ i_D^B = \delta_B \circ i_D^B$.

Prueba:
En lo que respecta al apartado (i) la prueba es la siguiente:

$$p_D^B \circ \mu_B \circ (B \otimes q_D^B)$$

$$
\begin{aligned}
&= p_D^B \circ \mu_B \circ (\mu_B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ (B \otimes \delta_B) \\
&= p_D^B \circ \mu_B \circ (\mu_B \otimes (f \circ \Pi_D^L \circ \lambda_D \circ g)) \circ (B \otimes \delta_B) \\
&= p_D^B \circ \mu_B \circ (\mu_B \otimes (f \circ \Pi_D^L \circ \Pi_D^R \circ g)) \circ (B \otimes \delta_B) \\
&= p_D^B \circ \mu_B \circ (B \otimes (\mu_B \circ (B \otimes \Pi_D^R) \circ \delta_B)) \\
&= p_D^B \circ \mu_B,
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad es cierta por la definición de q_D^B y la asociatividad de μ_B, la segunda por el apartado (ii) de la Proposición 5.1.7, la tercera por (1.33), la cuarta se sigue de la Observación 5.1.4, la asociatividad de μ_B, y el apartado (ii) de la Proposición 5.1.7 de nuevo, mientras que en la última se usa (1.30).

La otra igualdad se deduce procediendo del mismo modo, utilizando (i) de la Proposición 5.1.7. □

Lema 5.1.11. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Si (B, f, g) es un objeto en $\mathcal{P}roj(D)$ y q_D^B el morfismo definido en la Proposición 5.1.5 se tienen las igualdades:*

(i) $t_{B,B} \circ (B \otimes q_D^B) = (q_D^B \otimes B) \circ t_{B,B}$,

(ii) $t_{B,B} \circ (q_D^B \otimes B) = (B \otimes q_D^B) \circ t_{B,B}$,

y las igualdades análogas cambiando $t_{B,B}$ por $t'_{B,B}$.

Prueba:
La prueba de la primera igualdad es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
& t_{B,B} \circ (B \otimes q_D^B) \\
&= (\mu_B \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (t_{B,B} \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ (B \otimes \delta_B) \\
&= (\mu_B \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes \delta_B) \\
&= (q_D^B \otimes B) \circ t_{B,B},
\end{aligned}
$$

donde la primera identidad es consecuencia de (b3-2) de la Definición 1.2.9, la segunda de (1.54) y la condición (*ii*) de la definición de proyección; la tercera de (b3-3) . El apartado (ii) se deduce análogamente usando ahora (b3-1) y (b3-4) de la Definición 1.2.9 y (1.53). □

Lema 5.1.12. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ y (B, f, g) un objeto en $\mathcal{P}roj(D)$. Se cumple:*

(i) El par $(B_D, \varphi_{B_D} = p_D^B \circ \mu_B \circ (f \otimes i_D^B))$ es un D-módulo por la izquierda.

(ii) El par $(B_D, \varrho_{B_D} = (g \otimes p_D^B) \circ \delta_B \circ i_D^B)$ es un D-comódulo por la izquierda.

Prueba:
Probemos en primer lugar el apartado (i). En efecto, por ser f un morfismo de álgebras y por las propiedades de η_B obtenemos que

$$\varphi_{B_D} \circ (\eta_D \otimes B_D) = p_D^B \circ \mu_B \circ (f \otimes i_D^B) \circ (\eta_D \otimes B_D) = p_D^B \circ i_D^B = id_{B_D}.$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} & \varphi_{B_D} \circ (D \otimes \varphi_{B_D}) \\ &= p_B^D \circ \mu_B \circ (f \otimes (q_D^B \circ \mu_B \circ (f \otimes i_D^B))) \\ &= p_B^D \circ \mu_B \circ ((\mu_B \circ (f \otimes f)) \otimes i_D^B) \\ &= \varphi_{B_D} \circ (\mu_D \otimes B_D), \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue por la definición de φ_{B_D}, la segunda por la parte (i) del Lema 5.1.10, el carácter mónico de i_D^B y la asociatividad de μ_B; la tercera por la condición de morfismo de álgebras de f.

La prueba del segundo apartado se realiza de modo análogo haciendo uso de las propiedades de ε_B, la parte (ii) del Lema 5.1.10, la coasociatividad de δ_B, el carácter épico de p_D^B y que g es un morfismo de coálgebras. □

Lema 5.1.13. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ y (B, f, g) un objeto en $\mathcal{P}roj(D)$. Se cumple que la cuádrupla $(r_{B_D}, r'_{B_D}, s_{B_D}, s'_{B_D})$ donde*

$$r_{B_D} = (g \otimes p_D^B) \circ t_{B,B} \circ (i_D^B \otimes f), \quad r'_{B_D} = (p_D^B \otimes g) \circ t'_{B,B} \circ (f \otimes i_D^B),$$

$$s_{B_D} = (p_D^B \otimes g) \circ t_{B,B} \circ (f \otimes i_D^B), \quad s'_{B_D} = (g \otimes p_D^B) \circ t'_{B,B} \circ (i_D^B \otimes f).$$

es un (B_D, D)-OD compatible con las estructuras de D-(co)módulo definidas en la Proposición 5.1.12.

Prueba:
Para demostrar que la cuádrupla indicada es un (B_D, D)-OD, es suficiente con comprobar que la cuádrupla (r_B, r'_B, s_B, s'_B) con

$$r_B = (g \otimes B) \circ t_{B,B} \circ (B \otimes f), \quad r'_B = (g \otimes B) \circ t'_{B,B} \circ (B \otimes f),$$

$$s_B = (B \otimes g) \circ t_{B,B} \circ (f \otimes B), \quad s'_B = (B \otimes g) \circ t'_{B,B} \circ (f \otimes B),$$

es un (B, D)-OD y aplicar la Proposición 2.1.21.

La condición (e1-1) de la Definición 2.1.1 se cumple ya que:

$$\begin{aligned}
&(D \otimes r_B) \circ (r_B \otimes D) \circ (B \otimes t_{D,D}) \\
&= (g \otimes g \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes f \otimes f) \circ (B \otimes t_{D,D}) \\
&= (g \otimes g \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (B \otimes f \otimes f) \\
&= (g \otimes g \otimes B) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes f \otimes f) \\
&= (t_{D,D} \otimes B) \circ (g \otimes g \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes f \otimes f) \\
&= (t_{D,D} \otimes B) \circ (D \otimes r_B) \circ (r_B \otimes D),
\end{aligned}$$

siendo las igualdades primera y última ciertas por la definición de r_B, la segunda por ser f un morfismo de AHTD, la tercera por (a1) de la Definición 1.2.4 y la cuarta por ser g un morfismo de AHTD. El resto de condiciones requeridas en (e1) de la Definición 2.1.1 se deducen por el mismo procedimiento, utilizando la condición (a1) de la Definición 1.2.4 para $t'_{B,B}$ cuando corresponda. Las igualdades requeridas en la condición (e2) de la Definición 2.1.1 también se demuestran usando las mismas técnicas, pero en este caso en vez de aplicar (a1) de la Definición 1.2.4 se usa la Observación 1.2.8.

Para probar (e3) de la Definición 2.1.1, nótese primero que por la definición de proyección y (1.2) se tiene

$$r'_B \circ r_B = (B \otimes g) \circ t'_{B,B} \circ ((f \circ g) \otimes B) \circ t_{B,B} \circ (B \otimes f), \tag{5.5}$$

$$r'_B \circ r_B = (B \otimes g) \circ \nabla_{B,B} \circ (B \otimes f), \tag{5.6}$$

y como consecuencia obtenemos (e3-1) de la Definición 2.1.1 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon_D \otimes B \otimes D) \circ (r_B \otimes D) \circ (B \otimes \delta_D)\\
&= ((\varepsilon_D \circ g) \otimes B \otimes D) \circ (t_{B,B} \otimes D) \circ (B \otimes f \otimes D) \circ (B \otimes \delta_D)\\
&= (B \otimes \varepsilon_B \otimes D) \circ (\nabla_{B,B} \otimes D) \circ (B \otimes f \otimes D) \circ (B \otimes \delta_D)\\
&= (B \otimes \varepsilon_B \otimes g) \circ (\nabla_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes (\delta_B \circ f))\\
&= (B \otimes g) \circ \nabla_{B,B} \circ (B \otimes f),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la definición de r_B, la segunda se sigue porque g es un morfismo de coálgebras y (1.20), la tercera por ser f morfismo de coálgebras y $g \circ f = id_D$, la cuarta por (b2-3) de la Definición 1.2.9 y las propiedades de ε_B. Por otro lado, de forma análoga se tiene que:

$$(B \otimes \mu_D) \circ (r'_B \otimes D) \circ (\eta_D \otimes B \otimes D) = (B \otimes g) \circ \nabla_{B,B} \circ (B \otimes f).$$

La demostración de (e3-2) de la Definición 2.1.1 es análoga.

En cuanto a (e4-1) de la Definición 2.1.1 su prueba es:

$$\begin{aligned}
&r_B \circ (B \otimes \mu_D)\\
&= (g \otimes B) \circ t_{B,B} \circ (B \otimes (f \circ \mu_D))\\
&= ((g \circ \mu_B) \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes f \otimes f)\\
&= (\mu_D \otimes B) \circ (g \otimes g \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes f \otimes f)\\
&= (\mu_D \otimes B) \circ (D \otimes r_B) \circ (r_B \otimes D),
\end{aligned}$$

donde las igualdades primera y última son consecuencia de la definición de r_B, la segunda de ser f morfismo de álgebras y (b3-2) de la Definición 1.2.9 y la tercera de ser g morfismo de álgebras.

La condición (e4-2) de la Definición 2.1.1 se obtiene análogamente y las pruebas de las restantes siguen la misma estrategia pero intercambiando entre sí las propiedades de álgebra y coálgebra.

La condición (e5) de la Definición 2.1.2 se sigue inmediatamente a partir de la descripción dada en (5.6) aplicando (1.53) y (1.54). Queda entonces demostrado que (r_B, r'_B, s_B, s'_B) es un (B, D)-OD y por tanto $(r_{B_D}, r'_{B_D}, s_{B_D}, s'_{B_D})$ es un (B_D, D)-OD.

Se cumple la compatibilidad con la estructura de módulo de B_D. En efecto; en primer lugar tenemos que

$$
\begin{aligned}
& r_{B_D} \circ (\varphi_{B_D} \otimes D) \\
&= (g \otimes p_D^B) \circ t_{B,B} \circ (q_D^B \otimes B) \circ (\mu_B \otimes B) \circ (f \otimes i_D^B \otimes f) \\
&= (g \otimes p_D^B) \circ t_{B,B} \circ (\mu_B \otimes B) \circ (f \otimes i_D^B \otimes f) \\
&= (g \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (f \otimes i_D^B \otimes f) \\
&= (D \otimes (p_D^B \circ (\mu_B \circ (f \otimes q_D^B)))) \circ ((t_{D,D} \circ (D \otimes g)) \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (D \otimes i_D^B \otimes f) \\
&= (D \otimes \varphi_{B_D}) \circ (t_{D,D} \otimes B_D) \circ (D \otimes r_{B_D}),
\end{aligned}
$$

donde en las igualdades primera y última se usan las definiciones de φ_{B_D} y r_{B_D}, la segunda se sigue por el apartado (ii) del Lema 5.1.11 y las propiedades de la escisión, la tercera por (b3-1) de la Definición 1.2.9, la cuarta por el apartado (i) del Lema 5.1.10 y (5.3).

Por otro lado también se cumple que:

$$
\begin{aligned}
& s_{B_D} \circ (D \otimes \varphi_{B_D}) \\
&= (p_D^B \otimes g) \circ t_{B,B} \circ (B \otimes (q_D \circ \mu_B)) \circ (f \otimes f \otimes i_D^B) \\
&= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes g) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (f \otimes f \otimes i_D^B)) \\
&= ((p_D^B \circ \mu_B \circ (f \otimes (i_D^B \circ p_D^B))) \otimes g) \circ (D \otimes t_{B,B}) \circ (D \otimes f \otimes i_D^B) \circ (t_{D,D} \otimes B_D) \\
&= (\varphi_{B_D} \otimes D) \circ (D \otimes s_{B_D}) \circ (t_{D,D} \otimes B_D),
\end{aligned}
$$

siendo las igualdades primera y última ciertas por la definición de φ_{B_D} y s_{B_D}, la segunda por el apartado (i) del Lema 5.1.11, las propiedades de la escisión y (b3-2) de la Definición 1.2.9, la tercera por el apartado (i) del Lema 5.1.10 y el carácter de morfismo de AHTD de f.

Las otras dos condiciones restantes exigidas para tener la compatibilidad con la estructura de módulo se deducen de modo análogo sin más que usar las propiedades correspondientes para $t'_{B,B}$ y $t'_{D,D}$.

La compatibilidad con la estructura de comódulo es obtenida procediendo de modo similar utilizando las propiedades de coálgebra y comódulo. □

Proposición 5.1.14. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ y (B, f, g) un objeto en la categoría $\mathcal{P}roj(D)$. El triple $(B_D, \varphi_{B_D}, \varrho_{B_D})$ es un módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda con las estructuras de (co)módulo dadas en el Lema 5.1.12 y el operador débil el definido en el Lema 5.1.13.*

Prueba:
Gracias a la Proposición 3.1.6 es suficiente con probar (yd3-ii). El lado izquierdo de la igualdad puede expresarse como sigue:

$$\begin{aligned}
&\varrho_{B_D} \circ \varphi_{B_D} \\
&= (g \otimes p_D^B) \circ \delta_B \circ q_D^B \circ \mu_B \circ (f \otimes i_D^B) \\
&= ((g \circ \mu_B) \otimes p_D^B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (B \otimes q_D^B \otimes B) \circ (\delta_B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ \delta_B \\
&\circ \mu_B \circ (f \otimes i_D^B),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue por las definiciones de las (co)estructuras de (co)módulo de B_D, la tercera por el Lema 5.1.11 y las propiedades de la escisión, y la segunda se cumple porque usando la asociatividad de μ_B, la coasociatividad de δ_B, la anticomultiplicatividad del antípodo y el carácter de morfismos de coálgebras de f y g resulta

$$\delta_B \circ q_D^B = (\mu_B \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (B \otimes q_D^B \otimes B) \circ (\delta_B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ \delta_B. \quad (5.7)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\delta_B \circ q_D^B \\
&= (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ (\delta_B \otimes (\delta_B \circ f \circ \lambda_D \circ g)) \circ \delta_B \\
&= (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ (\delta_B \otimes (((f \circ \lambda_D \circ g) \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ t_{B,B} \circ \delta_B)) \circ \delta_B
\end{aligned}$$

$$= (\mu_B \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (B \otimes q_D^B \otimes B) \circ (\delta_B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ \delta_B.$$

Por otra parte:

$$(\mu_D \otimes B_D) \circ (D \otimes r_{B_D}) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_{B_D}) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes B_D)$$
$$\circ(\delta_D \otimes \varrho_{B_D})) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes s_{B_D}) \circ (\delta_D \otimes B_D)$$
$$= (\mu_D \otimes p_D^B) \circ (D \otimes g \otimes B) \circ (D \otimes t_{B,B}) \circ (\mu_D \otimes (q_D^B \circ \mu_B$$
$$\circ(f \otimes B)) \otimes B) \circ (\mu_D \otimes D \otimes q_D^B \otimes B) \circ (D \otimes (t_{D,D}$$
$$\circ(D \otimes g)) \otimes B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ (\delta_D \otimes (\delta_B \circ q_D^B) \otimes B) \circ (D \otimes t_{B,B})$$
$$\circ(((D \otimes f) \circ \delta_D) \otimes i_D^B)$$
$$= (\mu_D \otimes p_D^B) \circ (D \otimes g \otimes B) \circ (D \otimes t_{B,B}) \circ ((((\mu_D \circ (g \otimes g)) \otimes \mu_B)$$
$$\circ(B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ (((f \otimes f) \circ \delta_D) \otimes \delta_B)) \otimes \lambda_B) \circ (D \otimes t_{B,B})$$
$$\circ(((D \otimes f) \circ \delta_D) \otimes i_D^B)$$
$$= ((g \circ \mu_D) \otimes p_D^B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ ((\delta_B \circ \mu_B) \otimes \lambda_B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ ((\delta_B \circ f) \otimes i_D^B)$$
$$= ((g \circ \mu_D) \otimes p_D^B) \circ \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (\delta_B \otimes \lambda_B) \circ (\mu_B \otimes \mu_B)$$
$$\circ(B \otimes t_{B,B} \otimes \Pi_B^L) \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \circ (f \otimes i_D^B)$$
$$= ((g \circ \mu_D) \otimes p_D^B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (\delta_B \otimes \lambda_B) \circ (\mu_B \otimes \mu_B)$$
$$\circ(B \otimes t_{B,B} \otimes (f \circ \Pi_D^L \circ g)) \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \circ (f \circ i_D^B)$$
$$= ((g \circ \mu_D) \otimes p_D^B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (\delta_B \otimes \lambda_B) \circ (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (D \otimes t_{B,B} \otimes B)$$
$$\circ(f \otimes (f \circ g \circ f) \otimes B \otimes (f \circ g)) \circ (\delta_D \otimes (\delta_D \circ i_D^B))$$
$$= ((g \circ \mu_D) \otimes p_D^B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (\delta_B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ (\mu_B \otimes \mu_B)$$
$$\circ(D \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ ((\delta_B \circ f) \otimes (\delta_B \circ i_D^B))$$
$$= ((g \circ \mu_D) \otimes p_D^B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (\delta_B \otimes (f \circ \lambda_D \circ g)) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (f \otimes i_D^B)$$
$$= \varrho_{B_D} \circ \varphi_{B_D}.$$

En los cálculos precedentes, la primera igualdad resulta de las definiciones de φ_{B_D} y ϱ_{B_D}, la segunda de (1.51), (1.35), (1.36), el carácter de morfismo de AHTD de f y g, la igualdad $g\circ f = id_D$ y (5.3). La tercera igualdad se deduce por la coasociatividad de δ_D, por ser f morfismo de coálgebras y g de álgebras, y (b4) de la Definición 1.2.9. En la cuarta igualdad se aplica (3.16), en la quinta la Observación 5.1.4, en la sexta el carácter de morfismo de coálgebras de f, la Observación 5.1.4 y (1.51), en la séptima las propiedades de f y g, en la octava (b4) de la Definición 1.2.9 y en la novena (5.7). □

Observación 5.1.15. Todo $\alpha : B \to B'$ morfismo de proyecciones sobre D entre (B, f, g) y (B', f', g'), induce un morfismo de (co)módulos $\alpha_D : B_D \to B'_D$ porque

$$
\begin{aligned}
&(B'\otimes(\Pi_D^L\circ g'))\circ\delta_{B'}\circ\alpha\circ i_D^B\\
&=(\alpha\otimes(\Pi_D^L\circ g'\circ\alpha))\circ\delta_B\circ i_D^B\\
&=(\alpha\otimes(\Pi_D^L\circ g))\circ\delta_B\circ i_D^B\\
&=(\alpha\otimes g)\circ\delta_B\circ i_D^B\\
&=(\alpha\otimes(g'\circ\alpha))\circ\delta_B\circ i_D^B\\
&=(B'\otimes g')\circ\delta_{B'}\circ\alpha\circ i_D^B.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, como consecuencia de la Proposición 5.1.7 existe un único morfismo α_D tal que $i_D^{B'}\circ\alpha_D=\alpha\circ i_D^B$. Por otra parte, usando que α es un morfismo de AHTD y las igualdades $f'=\alpha\circ f$ y $g=g'\circ\alpha$ se obtiene que α_D es un morfismo de D-(co)módulos por la izquierda.

Este morfismo α_D cumple la condición (ii) de la Definición 3.1.3 ya que:

$$
\begin{aligned}
&r_{B'_D}\circ(\alpha_D\otimes D)\\
&=(g'\otimes p_D^{B'})\circ t_{B',B'}\circ((i_D^{B'}\circ\alpha_D)\otimes f')\\
&=(g'\otimes p_D^{B'})\circ t_{B',B'}\circ((\alpha\circ i_D^B)\otimes(\alpha\circ f))\\
&=((g'\circ\alpha)\otimes(p_D^{B'}\circ\alpha))\circ t_{B,B}\circ(i_D^B\otimes f)
\end{aligned}
$$

$$= (g \otimes (\alpha_D \circ p_D^B)) \circ t_{B,B} \circ (i_D^B \otimes f)$$

$$= (D \otimes \alpha_D) \circ r_{B_D},$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la definición de $r_{B'_D}$, la segunda y la cuarta se siguen de la definición de α_D y el carácter de morfismo de proyecciones de α; la tercera por ser α un morfismo de AHTD. La quinta igualdad se cumple porque α_D se define como la factorización de α a través del diagrama igualador de la Proposición 5.1.7 y entonces $p_D^{B'} \circ \alpha \circ q_D^B = \alpha_D \circ p_D^B$.

La segunda igualdad (ii) contenida en la Definición 3.1.3 se deduce de modo similar.

Como una primera aplicación de la Proposición 5.1.14 se tiene:

Corolario 5.1.16. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. Existe un funtor*

$$F : \mathcal{P}roj(D) \longrightarrow {}_D^D\mathcal{Y}D$$

definido como $F((B, f, g)) = (B_D, \varphi_{B_D}, \varrho_{B_D})$ en los objetos y $F(\alpha) = \alpha_D$ en los morfismos.

Prueba:
En virtud de la Proposición 5.1.14 el triple $(B_D, \varphi_{B_D}, \varrho_{B_D})$ es un objeto en la categoría ${}_D^D\mathcal{Y}D$. Además, si $\alpha : B \to B'$ es un morfismo de proyecciones, por la Observación 5.1.15 existe de un único morfismo $\alpha_D : B_D \to B'_D$ en $\mathcal{C}$ tal que $i_D^{B'} \circ \alpha_D = \alpha \circ i_D^B$ y éste cumple las condiciones de la definición de morfismo en la categoría ${}_D^D\mathcal{Y}\mathcal{D}$. □

La Proposición 5.1.14 y el Teorema 4.2.1 permiten concluir también:

Corolario 5.1.17. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y (B, f, g) un objeto de la categoría $\mathcal{P}roj(D)$. Entonces se cumple que:*

(i) $(B_D, \psi^{\lambda}_{B_D}, \varrho^{\lambda^{-1}}_{B_D}) \in \mathcal{YD}_D^D$,

(ii) $(B_D, \psi^{\lambda^{-1}}_{B_D}, \rho^{\lambda}_{B_D}) \in \mathcal{YD}_D^D$,

(iii) $(B_D, \psi_{B_D}, \rho'_{B_D}) \in \mathcal{YD}_{D^{coop^{op}}}^{D^{coop^{op}}}$,

(iv) $(B_D, \psi'_{B_D}, \rho_{B_D}) \in \mathcal{YD}_{D^{op^{coop}}}^{D^{op^{coop}}}$,

(v) $(B_D, \varphi_{B_D}, \rho'_{B_D}) \in {}_{D^{coop}}\mathcal{YD}^{D^{coop}}$,

(vi) $(B_D, \psi'_{B_D}, \varrho_{B_D}) \in {}^{D^{op}}\mathcal{YD}_{D^{op}}$,

(vii) $(B_D, \varphi_{B_D}, \rho^{\lambda^{-1}}_{B_D}) \in {}_D\mathcal{YD}^D$,

$(viii)$ $(B_D, \psi^{\lambda^{-1}}_{B_D}, \varrho_{B_D}) \in {}^D\mathcal{YD}_D$,

donde

$$\psi^{\lambda}_{B_D} = p^B_D \circ \mu_B \circ t_{B,B} \circ (i^B_D \otimes (f \circ \lambda_D)), \;\; \rho^{\lambda^{-1}}_{B_D} = (p^B_D \otimes (\lambda^{-1}_D \circ g)) \circ t'_{B,B} \circ \delta_B \circ i^B_D,$$

$$\psi^{\lambda^{-1}}_{B_D} := p^B_D \circ \mu_B \circ t'_{B,B} \circ (i^B_D \otimes (f \circ \lambda^{-1}_D)), \;\; \rho^{\lambda}_{B_D} := (p^B_D \otimes (\lambda_D \circ g)) \circ t_{B,B} \circ \delta_B \circ i^B_D,$$

$$\psi_{B_D} := p^B_D \circ \mu_B \circ t_{B,B} \circ (i^B_D \otimes f), \;\; \rho'_{B_D} := (p^B_D \otimes g) \circ t'_{B,B} \circ \delta_B \circ i^B_D,$$

$$\psi'_{B_D} := p^B_D \circ \mu_B \circ t'_{B,B} \circ (i^B_D \otimes f), \;\; \rho_{B_D} := (p^B_D \otimes g) \circ t_{B,B} \circ \delta_B \circ i^B_D.$$

5.2. Operadores débiles y entrelazamientos débiles

Los resultados de la sección anterior serán ahora aplicados al estudio de la relación entre los conceptos de operador Yang-Baxter débil y el de entrelazamiento débil.

Se recuerda sucintamente la definición de entrelazamiento débil inversible (véase [7] para una exposición detallada).

Definición 5.2.1. Una estructura entrelazada débil derecha-derecha es un triple (A, C, Ψ_R) donde A es un álgebra, C una coálgebra y $\Psi_R : C \otimes A \to A \otimes C$ un morfismo tal que:

(i) $(\mu_A \otimes C) \circ (A \otimes \Psi_R) \circ (\Psi_R \otimes A) = \Psi_R \circ (C \otimes \mu_A)$,

(ii) $\Psi_R \circ (C \otimes \eta_A) = (e_R \otimes C) \circ \delta_C$,

(iii) $(A \otimes \delta_C) \circ \Psi_R = (\Psi_R \otimes C) \circ (C \otimes \Psi_R) \circ (\delta_C \otimes A)$,

(iv) $(A \otimes \varepsilon_C) \circ \Psi_R = \mu_A \circ (e_R \otimes A)$, donde $e_R = (A \otimes \varepsilon_C) \circ \Psi_R \circ (C \otimes \eta_A) : C \to A$. De modo similar se define la noción de estructura entrelazada débil izquierda-izquierda (A, C, Ψ_L) para un álgebra A, una coálgebra C y un morfismo $\Psi_L : A \otimes C \to C \otimes A$ satisfaciendo igualdades similares a las previas con $e_L = (\varepsilon_C \otimes A) \circ \Psi_L \circ (\eta_A \otimes C) : C \to A$.

5.2.2. Sea (A, C, Ψ_R) una estructura entrelazada débil derecha-derecha. Se define la aplicación $\Delta_R : A \otimes C \to A \otimes C$ como

$$\Delta_R = (\mu_A \otimes C) \circ (A \otimes \Psi_R) \circ (A \otimes C \otimes \eta_A).$$

Este morfismo es idempotente, al igual que el morfismo $\nabla_R : C \otimes A \to C \otimes A$ definido como

$$\nabla_R = (C \otimes A \otimes \varepsilon_C) \circ (C \otimes \Psi_R) \circ (\delta_C \otimes A).$$

Los morfismos idempotentes correspondientes para una estructura entrelazada débil izquierda-izquierda se designan por Δ_L y ∇_L.

Definición 5.2.3. Sea A un álgebra, C una coálgebra y $\Psi_R : C \otimes A \to A \otimes C$ y $\Psi_L : A \otimes C \to C \otimes A$ morfismos en $\mathcal{C}$. Se dice que (C, A, Ψ_R, Ψ_L) es una estructura entrelazada débil inversible cuando se cumplen las condiciones siguientes:

(i) El triple (A, C, Ψ_R) es una estructura entrelazada débil derecha-derecha y el triple (A, C, Ψ_L) una estructura entrelazada débil izquierda-izquierda,

(ii) $\Psi_L \circ \Psi_R = \Delta_L$ y $\Psi_R \circ \Psi_L = \Delta_R$.

La relación entre las nociones de operador Yang-Baxter débil y estructura entrelazada débil inversible puede expresarse en términos de operadores débiles como se pone de manifiesto en el siguiente resultado.

Proposición 5.2.4. *Con la notación del Lema 5.1.13, se cumple que:*

(i) $(B_D, D, s_{B_D}, s'_{B_D})$ *es una estructura entrelazada débil inversible,*

(ii) $(B_D, D, r'_{B_D}, r_{B_D})$ *es una estructura entrelazada débil inversible.*

Prueba:
Probemos en primer lugar que (B_D, D, s_{B_D}) es una estructura entrelazada débil derecha-derecha.

La igualdad (i) de la Definición 5.2.1 se cumple ya que:

$$(\mu_{B_D} \otimes D) \circ (B_D \otimes s_{B_D}) \circ (s_{B_D} \otimes B_D)$$

$$= ((p_D^B \circ \mu_B \circ ((i_D^B \circ p_D^B) \otimes (i_D^B \circ p_D^B))) \otimes g) \circ (B \otimes t_{B,B})$$

$$\circ (B \otimes (f \circ g) \otimes B) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (f \otimes i_D^B \otimes i_D^B)$$

$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes g) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (t_{B,B} \otimes B) \circ (f \otimes i_D^B \otimes i_D^B)$$

$$= (p_D^B \otimes g) \circ t_{B,B} \circ (B \otimes \mu_B) \circ (f \otimes i_D^B \otimes i_D^B)$$

$$= s_{B_D} \circ (D \otimes \mu_{B_D}),$$

siendo la primera igualdad cierta por las definiciones de μ_{B_D} y s_{B_D}; la segunda es consecuencia de la parte (i) del Lema 5.1.11, de las propiedades de la escisión y de la condición (i) de la Definición 5.1.1; la tercera se sigue de (b3-2) de la Definición 1.2.9 y la última por ser μ_{B_D} la factorización de $\mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B)$ a través del morfismo igualador i_D^B de la Proposición 5.1.7.

Para demostrar (ii) de la Definición 5.2.1, nótese primero que por ser g morfismo de coálgebras y estar definido η_{B_D} como la factorización de η_B por el morfismo igualador i_D^B resulta

$$e_R = (p_D^B \otimes \varepsilon_B) \circ t_{B,B} \circ (f \otimes \eta_B), \tag{5.8}$$

y entonces

$$(e_R \otimes D) \circ \delta_D$$

$$= (p_D^B \otimes \varepsilon_B \otimes D) \circ (t_{B,B} \otimes D) \circ (f \otimes \eta_B \otimes D) \circ \delta_D$$

$$= (p_D^B \otimes \varepsilon_B \otimes g) \circ (\nabla_{B,B} \otimes B) \circ (\eta_B \otimes f \otimes f) \circ \delta_D$$

$$= (p_D^B \otimes \varepsilon_B \otimes g) \circ (\nabla_{B,B} \otimes B) \circ (\eta_B \otimes (\delta_B \circ f))$$

$$= (p_D^B \otimes \varepsilon_B \otimes g) \circ (B \otimes \delta_B) \circ \nabla_{B,B} \circ (\eta_B \otimes f)$$

$$= (p_D^B \otimes g) \circ t_{B,B} \circ (f \otimes i_D^B) \circ (D \otimes \eta_{B_D})$$

$$= s_{B_D} \circ (D \otimes \eta_{B_D}),$$

donde la primera igualdad es consecuencia de (5.8), la segunda de (1.18) y $g \circ f = id_D$; la tercera es cierta porque f es un morfismo de coálgebras, la cuarta se sigue de (b2-3) de la Definición 1.2.9, la quinta de las propiedades de ε_B, (1.18), y de estar η_{B_D} definida como la factorización de η_B a través del morfismo igualador i_D^B; la última igualdad se deduce de la definición de s_{B_D}.

La fórmula (iii) de la Definición 5.2.1 es consecuencia de que la cuádrupla $(r_{B_D}, r'_{B_D}, s'_{B_D})$ es un (B_D, D)-OD, mientras que para probar (iv) de la Definición 5.2.1 basta con tomar la prueba de (ii) de la Definición 5.2.1 y proceder de modo análogo realizando un intercambio entre las correspondientes propiedades de álgebra y coálgebra.

La prueba de que (B_D, D, s'_{B_D}) es una estructura de entrelazamiento débil izquierda-izquierda es análoga, usando (b3) de la Definición 1.2.9 y el Lema 5.1.11.

En lo que concierne al apartado (ii) de la Definición 5.2.3, la prueba es la siguiente:

$$s_{B_D} \circ s'_{B_D}$$

$$= (p_D^B \otimes g) \circ t_{B,B} \circ ((f \circ g) \otimes (i_D^B \circ p_D^B)) \circ t'_{B,B} \circ (i_D^B \otimes f)$$

$$= (p_D^B \otimes g) \circ \nabla_{B,B} \circ (i_D^B \otimes f)$$

$$= (p_D^B \otimes g) \circ \nabla_{B,B} \circ (\mu_B \otimes B) \circ (i_D^B \otimes \eta_B \otimes f)$$

$$= (p_D^B \otimes g) \circ (\mu_B \otimes B) \circ (B \otimes \nabla_{B,B}) \circ (i_D^B \otimes \eta_B \otimes f)$$

$$= (p_D^B \otimes D) \circ (\mu_B \otimes B) \circ (i_D^B \otimes (i_D^B \circ p_D^B) \otimes g) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (B \otimes f \otimes (i_D^B \circ \eta_{B_D}))$$

$$= (\mu_{B_D} \otimes D) \circ (B_D \otimes s_{B_D}) \circ (B_D \otimes D \otimes \eta_{B_D})$$

$$= \Delta_R,$$

donde las igualdades primera, sexta y séptima se tienen por las definiciones de s_{B_D}, s'_{B_D} y Δ_R, la segunda se sigue por el apartado (ii) del Lema 5.1.11, las propiedades de la escisión, la condición (i) de la Definición 5.1.1, la fórmula

$g \circ f = id_D$ y (1.2). En la tercera igualdad se usan las propiedades de la unidad η_B, en la cuarta (b1-2) de la Definición 1.2.9, en la quinta el Lema 5.1.11, (1.17), y la definición de η_{B_D} como la factorización de η_B a través del morfismo igualador i_D^B.

Finalmente, de modo similar se comprueba que $s'_{B_D} \circ s_{B_D} = \Delta_L$.

El uso de los mismos argumentos conduce a la demostración del apartado (ii). □

5.3. La estructura de AHTD del objeto B_D

Sea D un AHDT en $\mathcal{C}$. Se demostró en la Proposición 5.1.14 que el triple $(B_D, \varphi_{B_D}, \varrho_{B_D})$ es un objeto de la categoría ${}_D^D\mathcal{YD}$. Por lo tanto, si seguimos el capítulo 3 de esta memoria se tienen los morfismos

$$\nabla_{B_D\otimes B_D} : B_D \otimes B_D \to B_D \otimes B_D \text{ y } \Delta_{B_D\otimes B_D} : B_D \otimes B_D \to B_D \otimes B_D$$

definidos como

$$\nabla_{B_D\otimes B_D} = (\varphi_{B_D} \otimes \varphi_{B_D}) \circ (D \otimes s_{B_D} \otimes B_D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes B_D \otimes B_D) \quad (5.9)$$

y

$$\Delta_{B_D\otimes B_D} = ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes B_D \otimes B_D) \circ (D \otimes r_{B_D} \otimes B_D) \circ (\varrho_{B_D} \otimes \varrho_{B_D}). \quad (5.10)$$

Además, en virtud de la Proposición 3.2.5, $\nabla_{B_D\otimes B_D} = \Delta_{B_D\otimes B_D}$ y en este caso es posible probar que:

$$\nabla_{B_D\otimes B_D} = (B_D \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ (p_D^B \otimes \Pi_B^L \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes i_D^B), \quad (5.11)$$

$$\Delta_{B_D\otimes B_D} = ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes B_D) \circ (B \otimes \Pi_B^L \otimes p_D^B) \circ (i_D^B \otimes (\delta_B \circ i_D^B)). \quad (5.12)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{B_D\otimes B_D} \\
&= (\varphi_{B_D} \otimes \varphi_{B_D}) \circ (D \otimes s_{B_D} \otimes B_D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes B_D \otimes B_D) \\
&= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ (f \otimes (i_D^B \circ p_D^B) \otimes (f \circ g) \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B)
\end{aligned}$$

$$\circ(((D \otimes f) \circ \delta_D \circ \eta_D) \otimes i_D^B \otimes i_D^B)$$

$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ ((\delta_B \circ \eta_B) \otimes i_D^B \otimes i_D^B)$$

$$= (B_D \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ (p_D^B \otimes \Pi_B^L \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes i_D^B),$$

donde las dos primeras igualdades se tienen por las definiciones de $\nabla_{B_D \otimes B_D}$, s_{B_D} y φ_{B_D}; la tercera es cierta por la condición (i) de la Definición 5.1.1, la igualdad $g \circ f = id_D$, por ser f un morfismo de coálgebras, por el apartado (i) del Lema 5.1.11 y las propiedades de la escisión; la última se sigue de (1.43).

La prueba de la fórmula (5.12) se realiza siguiendo el esquema anterior pero sustituyendo las propiedades relativas a la estructura de módulo por las de comódulo e intercambiando entre sí las de álgebra y coálgebra.

El siguiente resultado es fundamental en la sección.

Proposición 5.3.1. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y (B, f, g) un objeto de $\mathcal{P}roj(D)$. Considerando los morfismos:*

$$r_{B_D,B_D} = (p_B^D \otimes p_B^D) \circ t_{B,B} \circ (i_D^B \otimes i_D^B) : B_D \otimes B_D \to B_D \otimes B_D$$

y

$$r'_{B_D,B_D} = (p_B^D \otimes p_B^D) \circ t'_{B,B} \circ (i_D^B \otimes i_D^B) : B_D \otimes B_D \to B_D \otimes B_D,$$

se cumple que la aplicación $t_{B_D,B_D} : B_D \otimes B_D \to B_D \otimes B_D$ definida como

$$t_{B_D,B_D} = (\varphi_{B_D} \otimes B_D) \circ (D \otimes r_{B_D,B_D}) \circ (\varrho_{B_D} \otimes B_D) \tag{5.13}$$

es un operador Yang-Baxter débil con

$$t'_{B_D,B_D} = r'_{B_D,B_D} \circ (\varphi_{B_D} \otimes B_D) \circ (s'_{B_D} \otimes B_D) \circ (B_D \otimes ((\lambda_D^{-1} \otimes B_D) \circ \varrho_{B_D})) \tag{5.14}$$

e idempotente asociado

$$\nabla_{B_D,B_D} = \nabla_{B_D \otimes B_D}. \tag{5.15}$$

Prueba:
Nótese en primer lugar que gracias al Lema 5.1.10, resulta

$$t_{B_D,B_D} = (p_B^D \otimes p_D^B) \circ (\mu_B \otimes B) \circ (f \otimes t_{B,B}) \circ (((g \otimes B) \circ \delta_B) \otimes B) \circ (i_B^D \otimes i_B^D), \tag{5.16}$$

mientras que por el Lema 5.1.11, las propiedades de la escisión, la Observación 5.1.2, la igualdad $g\circ f = id_D$, junto con (b3-1) de la Definición 1.2.9 y (a1) de la Definición 1.2.4 para $D^{\rm coop}$,

$$\begin{aligned} t'_{B_D,B_D} =&(p_D^B\otimes p_D^B)\circ(B\otimes \mu_B)\circ(B\otimes t'_{B,B})\circ(t'_{B,B}\otimes B)\circ(B\otimes t'_{B,B})\\ &\circ(B\otimes(f\circ\lambda_D^{-1}\circ g)\otimes B)\circ(B\otimes\delta_B)\circ(i_D^B\otimes i_D^B), \end{aligned} \tag{5.17}$$

ya que

$$\begin{aligned} &t'_{B_D,B_D}\\ &= (p_D^B\otimes p_D^B)\circ t'_{B,B}\circ(i_D^B\otimes i_D^B)\circ(p_D^B\otimes p_D^B)\circ(\mu_B\otimes B)\\ &\quad\circ(((f\circ g)\otimes(i_B^D\circ p_D^B)\circ t'_{B,B})\otimes B)\circ(i_D^B\otimes(((f\circ\lambda_D^{-1}\circ g)\otimes B)\circ\delta_B\circ i_D^B))\\ &= (p_D^B\otimes p_D^B)\circ(B\otimes\mu_B)\circ(t'_{B,B}\otimes B)\circ(B\otimes t'_{B,B})\circ(t'_{B,B}\otimes B)\\ &\quad\circ(i_D^B\otimes(((f\circ\lambda_D^{-1}\circ g)\otimes B)\circ\delta_B\circ i_D^B))\\ &= (p_D^B\otimes p_D^B)\circ(B\otimes\mu_B)\circ(B\otimes t'_{B,B})\circ(t'_{B,B}\otimes B)\circ(B\otimes t'_{B,B})\\ &\quad\circ(B\otimes(f\circ\lambda_D^{-1}\circ g)\otimes B)\circ(B\otimes\delta_B)\circ(i_D^B\otimes i_D^B). \end{aligned}$$

Una vez visto esto, procederemos a probar que t_{B_D,B_D} es un operador Yang-Baxter débil.

Para demostrar (a1) de la Definición 1.2.4, nótese en primer lugar que gracias al Lema 5.1.11, la propiedad de la escisión, (b3-4) de la Definición 1.2.9, la igualdad $g\circ f = id_D$ y la condición (i) de la Definición 5.1.1 se deduce

$$(B_D\otimes\varrho_{B_D})\circ r_{B_D,B_D} = (s_{B_D}\otimes B_D)\circ(D\otimes r_{B_D,B_D})\circ(\varrho_{B_D}\otimes B_D), \tag{5.18}$$

mientras que usando (b3-3) en vez de (b3-4) de la Definición 1.2.9 resulta

$$(\varrho_{B_D}\otimes B_D)\circ r_{B_D,B_D} = (D\otimes r_{B_D,B_D})\circ(r_{B_D}\otimes B_D)\circ(B_D\otimes\varrho_{B_D}). \tag{5.19}$$

Argumentando de modo similar pero usando las propiedades de la estructura de álgebra en vez de las de coálgebra y las de módulo en vez de las de comódulo se obtiene:

$$r_{B_D,B_D}\circ(B_D\otimes\varphi_{B_D}) = (\varphi_{B_D}\otimes B_D)\circ(D\otimes r_{B_D,B_D})\circ(r_{B_D}\otimes B_D) \tag{5.20}$$

y

$$r_{B_D,B_D} \circ (\varphi_{B_D} \otimes B_D) = (B_D \otimes \varphi_{B_D}) \circ (s_{B_D} \otimes B_D) \circ (D \otimes r_{B_D,B_D}). \quad (5.21)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
&(t_{B_D,B_D} \otimes B_D) \circ (B_D \otimes t_{B_D,B_D}) \circ (t_{B_D,B_D} \otimes B_D) \\
&= (\varphi_{B_D} \otimes B_D \otimes B_D) \circ (D \otimes \varphi_{B_D} \otimes B_D \otimes B_D) \circ (D \otimes D \otimes r_{B_D,B_D} \otimes B_D) \\
&\circ (D \otimes r_{B_D} \otimes r_{B_D,B_D}) \circ ((\varrho_{B_D} \circ \varphi_{B_D}) \otimes D \otimes B_D \otimes B_D) \\
&\circ (D \otimes s_{B_D} \otimes B_D \otimes B_D) \circ (D \otimes D \otimes r_{B_D,B_D} \otimes B_D) \\
&\circ (D \otimes \varrho_{B_D} \otimes B_D \otimes B_D) \circ (\varrho_{B_D} \otimes B_D \otimes B_D) \\
&= (\varphi_{B_D} \otimes B_D \otimes B_D) \circ (D \otimes r_{B_D,B_D} \otimes B_D) \circ (((\mu_D \otimes B_D) \circ (D \otimes r_{B_D}) \\
&\circ ((\varrho_{B_D} \circ \varphi_{B_D}) \otimes D) \circ (D \otimes s_{B_D}) \circ (\delta_D \otimes B_D)) \otimes r_{B_D,B_D}) \\
&\circ (D \otimes r_{B_D,B_D} \otimes B_D) \circ (\varrho_{B_D} \otimes B_D \otimes B_D) \\
&= (\varphi_{B_D} \otimes B_D \otimes B_D) \circ (D \otimes r_{B_D,B_D} \otimes B_D) \circ (((\mu_D \otimes \varphi_{B_D}) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes B_D) \\
&\circ (\delta_D \otimes \varrho_{B_D})) \otimes r_{B_D,B_D}) \circ (D \otimes r_{B_D,B_D} \otimes B_D) \circ (\varrho_{B_D} \otimes B_D \otimes B_D),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue por la definición de t_{B_D,B_D} junto con (5.18) y (5.20), la segunda por la condición de (co)módulo y la tercera por (yd2-ii).

Por otra parte, partiendo de $(B_D \otimes t_{B_D,B_D}) \circ (t_{B_D,B_D} \otimes B_D) \circ (B_D \otimes t_{B_D,B_D})$ y argumentando del mismo modo se obtiene la misma igualdad final, con lo que (a1) de la Definición 1.2.4 queda demostrada.

Veamos a continuación que tomando como idempotente asociado el morfismo

$$\nabla_{B_D,B_D} = \nabla_{B_D \otimes B_D},$$

se cumplen todas las condiciones de (a2) y (a3) de la definición de operador Yang-Baxter débil.

El carácter idempotente de $\nabla_{B_D \otimes B_D}$ es un caso particular de lo expuesto en el párrafo 3.2.1, y la condición (a2-1) de la Definición 1.2.4 lo es de (3.18). Las condiciones (a2-2) y (a2-3) de la Definición 1.2.4 son simétricas, por lo que solo haremos la prueba de una de ellas, realizándose la otra sin más que utilizar las propiedades correspondientes por el otro lado. Probemos (a2-3) de la Definición 1.2.4. En efecto:

$$
\begin{aligned}
&(t_{B_D,B_D} \otimes B_D) \circ (B_D \otimes \nabla_{B_D \otimes B_D}) \\
&= (\varphi_{B_D} \otimes B_D \otimes B_D) \circ (\mu_D \otimes r_{B_D,B_D} \otimes \varphi_{B_D}) \circ (D \otimes r_{B_D} \otimes s_{B_D} \otimes B_D) \\
&\circ (\varrho_{B_D} \otimes (\delta_D \circ \eta_D) \otimes B_D \otimes B_D) \\
&= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes B_D \otimes B_D) \circ ((f \circ \mu_D) \otimes B \otimes p_D^B \otimes (p_D^B \circ \mu_B) \\
&\circ (g \otimes g \otimes t_{B,B} \otimes (f \circ g) \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes t_{B,B} \otimes B) \\
&\circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ \eta_B) \otimes i_D^B \otimes i_D^B) \\
&= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes p_D^B \otimes p_D^B) \circ (\mu_B \otimes t_{B,B} \otimes \mu_B) \circ ((f \circ g) \otimes t_{B,B} \otimes t_{B,B} \otimes B) \\
&\circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ \eta_B) \otimes i_D^B \otimes i_D^B) \\
&= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes p_D^B \otimes B_D) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ (B \otimes B \otimes t_{B,B} \otimes B) \\
&\circ (\mu_B \otimes t'_{B,B} \otimes B \otimes B) \circ ((f \circ g) \otimes (\delta_B \circ \eta_B) \otimes B \otimes B \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes i_D^B \otimes i_D^B) \\
&= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes p_D^B \otimes B_D) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ (B \otimes B \otimes t_{B,B} \otimes B) \\
&\circ (B \otimes t'_{B,B} \otimes B \otimes B) \circ (B \otimes \overline{\Pi}_B^R \otimes B \otimes B \otimes B) \circ ((\delta_B \circ f \circ g) \otimes B \otimes B \otimes B) \\
&\circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes i_D^B \otimes i_D^B),
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue por las definiciones de t_{B_D,B_D} y $\nabla_{B_D \otimes B_D}$, (5.20) y la condición de módulo, la segunda por el Lema 5.1.11, las propiedades de la escisión, y por ser f un morfismo de coálgebras. La tercera igualdad es consecuencia de la definición de proyección y de ser f y g morfismos de (co)álgebras, la cuarta es cierta en virtud de (1.28); la quinta se sigue de (1.42).

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
&(B_D \otimes \nabla_{B_D \otimes B_D}) \circ (t_{B_D,B_D} \otimes B_D) \\
&= (B_D \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes B_D \otimes B_D) \circ (B_D \otimes D \otimes r_{B_D} \otimes B_D)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\circ(\varphi_{B_D}\otimes\varrho_{B_D}\otimes D\otimes B_D)\circ(D\otimes r_{B_D,B_D}\otimes D\otimes B_D)\circ(\varrho_{B_D}\otimes B_D\otimes\varrho_{B_D})\\
&=(\varphi_{B_D}\otimes(\varepsilon\circ\mu_D)\otimes B_D\otimes B_D)\circ(D\otimes s_{B_D}\otimes r_{B_D}\otimes B_D)\\
&\circ(D\otimes D\otimes r_{B_D,B_D}\otimes D\otimes B_D)\circ(D\otimes\varrho_{B_D}\otimes B_D\otimes D\otimes B_D)\circ(\varrho_{B_D}\otimes B_D\otimes\varrho_{B_D})\\
&=((p_D^B\circ\mu_B)\otimes B_D\otimes B_D)\circ(B\otimes i_D^B\otimes(\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes B_D\otimes B_D)\\
&\circ(B\otimes p_D^B\otimes g\otimes g\otimes p_D^B\otimes B_D)\circ(B\otimes t_{B,B}\otimes t_{B,B}\otimes B_D)\\
&\circ(f\otimes f\otimes i_D^B\otimes i_D^B\otimes f\otimes B_D)\circ(\delta_D\otimes r_{B_D,B_D}\otimes D\otimes B_D)\circ(\varrho_{B_D}\otimes B_D\otimes\varrho_{B_D})\\
&=(B_D\otimes p_D^B\otimes p_D^B)\circ(B_D\otimes t'_{B,B})\circ((p_D^B\circ\mu_B)\otimes(\mu_B\circ(\overline{\Pi}_B^R\otimes B))\otimes B)\\
&\circ((f\circ g)\otimes t_{B,B}\otimes t_{B,B})\circ(\delta_B\otimes t_{B,B}\otimes B)\circ(\delta_B\otimes B\otimes B)\circ(i_D^B\otimes i_D^B\otimes i_D^B)\\
&=((p_D^B\circ\mu_B)\otimes p_D^B\otimes B_D)\circ(B\otimes t_{B,B}\otimes(p_D^B\circ\mu_B))\circ(B\otimes B\otimes t_{B,B}\otimes B)\\
&\circ(B\otimes t'_{B,B}\otimes B\otimes B)\circ(B\otimes\overline{\Pi}_B^R\otimes B\otimes B\otimes B)\circ((\delta_B\circ f\circ g)\otimes B\otimes B\otimes B)\\
&\circ((\delta_B\circ i_D^B)\otimes i_D^B\otimes i_D^B),
\end{aligned}
$$

siendo cierta la primera igualdad porque $\nabla_{B_D\otimes B_D}=\Delta_{B_D\otimes B_D}$, la segunda por (5.18), la tercera por la condición de comódulo. La cuarta igualdad es consecuencia del Lema 5.1.11, las propiedades de la escisión, la definición de ϱ_{B_D}, las condiciones requeridas en la definición de proyección, (1.42) y la fórmula

$$(t_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes\delta_D)=(D\otimes t'_{D,D})\circ(\delta_D\otimes D)\circ t_{D,D},$$

que se sigue de (b3-3) de la Definición 1.2.9, (1.2), (a2-3) de la Definición 1.2.4 y (b2-1) de la Definición 1.2.9. Finalmente la quinta igualdad se deduce de (1.2), (b3-1) de la Definición 1.2.9 para $D^{\rm coop}$ y (a2-3) de la Definición 1.2.4 para $t'_{D,D}$.

Se estudian ahora los dos posibles morfismos que surgen de la composición de los operadores t_{B_D,B_D} y t'_{B_D,B_D}. Componiendo en un sentido resulta:

$$
\begin{aligned}
&t'_{B_D,B_D}\circ t_{B_D,B_D}\\
&=(p_D^B\otimes p_D^B)\circ t'_{B,B}\circ(i_D^B\otimes i_D^B)\circ((p_D^B\circ\mu_B\circ(f\otimes i_D^B))\otimes B_D)
\end{aligned}
$$

$$\circ(((g\otimes p_D^B)\circ t'_{B,B}\circ(i_D^B\otimes f))\otimes B_D)\circ(B\otimes\lambda_D^{-1}\otimes B_D)$$

$$\circ((p_D^B\circ\mu_B\circ(f\otimes i_D^B))\otimes((g\otimes p_D^B)\circ\delta_B\circ i_D^B))\circ(D\otimes((p_D^B\otimes p_D^B)\circ t_{B,B}$$

$$\circ(i_D^B\otimes i_D^B)))\circ(((g\otimes p_D^B)\circ\delta_B\circ i_D^B)\otimes B_D)$$

$$=(p_D^B\otimes p_D^B)\circ t'_{B,B}\circ((\mu_B\circ(f\circ g))\otimes B)\circ(t'_{B,B}\otimes B)$$

$$\circ((\mu_B\circ(f\otimes B))\otimes(((f\circ\lambda_D^{-1}\circ g)\otimes B)\circ\delta_B))\circ(D\otimes t_{B,B})$$

$$\circ(((g\otimes B)\circ\delta_B\circ i_D^B)\otimes i_D^B)$$

$$=(p_D^B\otimes p_D^B)\circ t'_{B,B}\circ(\mu_B\otimes B)\circ(B\otimes\mu_B\otimes B)\circ(t'_{B,B}\otimes B\otimes B)$$

$$\circ(B\otimes(t'_{B,B}\circ(B\otimes(f\circ\lambda_D^{-1}\circ g))\circ t_{B,B})\otimes B)\circ(B\otimes B\otimes t_{B,B})$$

$$\circ((f\circ g)\otimes\delta_B\otimes B)\circ((\delta_B\circ i_D^B)\otimes i_D^B)$$

$$=(p_D^B\otimes p_D^B)\circ t'_{B,B}\circ(\mu_B\otimes B)\circ(B\otimes\mu_B\otimes B)\circ(t'_{B,B}\otimes B\otimes B)\circ(B\otimes\nabla_{B,B}\otimes B)$$

$$\circ((((f\circ g)\otimes(f\circ\lambda_D^{-1}\circ g))\circ\delta_B)\otimes t_{B,B})\circ((\delta_B\circ i_D^B)\otimes i_D^B)$$

$$=(p_D^B\otimes p_D^B)\circ t'_{B,B}\circ(\mu_B\otimes B)\circ((\mu_B\circ t'_{B,B}\circ(B\otimes\lambda_B^{-1})\circ\delta_B)\otimes B\otimes B)$$

$$\circ(B\otimes t_{B,B}))\circ((((f\circ g)\otimes B)\circ\delta_B\circ i_D^B)\otimes i_D^B)$$

$$=(p_D^B\otimes p_D^B)\circ t'_{B,B}\circ(\mu_B\otimes B)\circ(\overline{\Pi}_B^R\otimes t_{B,B})\circ((((f\circ g)\otimes B)\circ\delta_B\circ i_D^B)\otimes i_D^B)$$

$$=(p_D^B\otimes p_D^B)\circ(B\otimes\mu_B)\circ(t'_{B,B}\otimes B)\circ(B\otimes t'_{B,B})\circ(\overline{\Pi}_B^R\otimes t_{B,B})\circ((\delta_B\circ i_D^B)\otimes i_D^B)$$

$$=(p_D^B\otimes(\varepsilon_B\circ\mu_B)\otimes p_D^B)\circ((t'_{B,B}\circ\delta_B\circ i_D^B)\otimes(\delta_B\circ i_D^B))$$

$$=((\varepsilon_B\circ\mu_B)\otimes p_D^B\otimes p_D^B)\circ(B\otimes t_{B,B}\otimes B)\circ((\delta_B\circ i_D^B)\otimes(\delta_B\circ i_D^B))$$

$$=((p_D^B\circ\mu_B)\otimes p_D^B)\circ(B\otimes\Pi_B^L\otimes B)\circ(i_D^B\otimes(\delta_B\circ i_D^B))$$

$$=\Delta_{B_D\otimes B_D},$$

donde la primera igualdad no es más que las definiciones de t_{B_D,B_D} y t'_{B_D,B_D}, en la segunda se aplican los Lemas 5.1.11 y 5.1.10 junto con las propiedades de la escisión, la tercera se sigue por (b3-1) de la Definición 1.2.9 para B^{coop}, (b3-4) de la Definición 1.2.9 para B y las condiciones impuestas en la definición de proyección. La cuarta igualdad es consecuencia de la coasociatividad de δ_B, el carácter de morfismo de AHTD de f y g, (1.53) para λ_D^{-1} y la condición (i) de la Definición 5.1.1. La quinta se obtiene gracias a la condición de morfismos de coálgebras de f y g, (a2-2) de la Definición 1.2.4 para $t'_{B,B}$, (b1-1) de la Definición 1.2.9 para B y la asociatividad de μ_B. La sexta es consecuencia de (1.33) junto con la fórmula

$$\lambda_B \circ \mu_B \circ t'_{B,B} \circ (B \otimes \lambda_B^{-1}) \circ \delta_B = \mu_B \circ \nabla_{B,B} \circ (\lambda_B \otimes B) \circ \delta_B = \Pi_B^R, \quad (5.22)$$

que a su vez se deduce de la antimultiplicatividad del antípodo, (1.2) y (b1-1) de la Definición 1.2.9. La séptima igualdad es cierta por (b3-1) de la Definición 1.2.9 para $B^{\rm coop}$, la octava por (1.2), (b1-1) de la Definición 1.2.9 y (a2-3) de la Definición 1.2.4 para $B^{\rm coop}$ además de (1.38) y (1.42); la novena se sigue de (1.26). Finalmente, la décima igualdad se sigue por (1.39) y la undécima por (5.12).

La prueba de que $t_{B_D,B_D} \circ t'_{B_D,B_D} = \Delta_{B_D \otimes B_D}$ se obtiene de modo análogo.

Una vez obtenidos estos resultados sobre los morfismos de composición es posible continuar con la prueba de los restantes axiomas de operador Yang-Baxter débil.

En efecto, la prueba de (a2-4) de la Definición 1.2.4 es:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{B_D \otimes B_D} \circ t_{B_D,B_D} \\
&= (\varphi_{B_D} \otimes B_D) \circ (D \otimes \varphi_{B_D} \otimes \varphi_{B_D}) \circ (D \otimes D \otimes s_{B_D} \otimes B_D) \\
&\quad \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes r_{B_D,B_D}) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \varrho_{B_D} \otimes B_D) \\
&= (\varphi_{B_D} \otimes B_D) \circ (D \otimes r_{B_D,B_D}) \circ (\mu_D \otimes \varphi_{B_D} \otimes B_D) \\
&\quad \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes B_D \otimes B_D) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes \varrho_{B_D} \otimes B_D) \\
&= t_{B_D,B_D},
\end{aligned}$$

siendo cierta la primera igualdad por las definiciones de $\nabla_{B_D \otimes B_D}$ y t_{B_D,B_D} junto con la compatibilidad del (B_D, D)-OD con la estructura de módulo, la segunda por la condición de módulo y (5.21), la tercera por (yd1-ii).

Por otra parte, puesto que $t'_{B_D,B_D} \circ t_{B_D,B_D} = t_{B_D,B_D} \circ t'_{B_D,B_D} = \nabla_{B_D \otimes B_D}$ se cumple:

$$
\begin{aligned}
& t_{B_D,B_D} \circ \nabla_{B_D\otimes B_D} \\
&= t_{B_D,B_D} \circ t'_{B_D,B_D} \circ t_{B_D,B_D} \\
&= \nabla_{B_D\otimes B_D} \circ t_{B_D,B_D} \\
&= t_{B_D,B_D}.
\end{aligned}
$$

Quedan entonces demostradas todas las condiciones de (a2) de la Definición 1.2.4.

Probemos ahora (a3-1) de la Definición 1.2.4. Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& p_{B_D,B_D} \circ t_{B_D,B_D} \circ i_{B_D,B_D} \circ p_{B_D,B_D} \circ t'_{B_D,B_D} \circ i_{B_D,B_D} \\
&= p_{B_D,B_D} \circ t_{B_D,B_D} \circ \nabla_{B_D\otimes B_D} \circ t'_{B_D,B_D} \circ i_{B_D,B_D} \\
&= p_{B_D,B_D} \circ t_{B_D,B_D} \circ t'_{B_D,B_D} \circ i_{B_D,B_D} \\
&= p_{B_D,B_D} \circ i_{B_D,B_D} = id_{B_D\times B_D},
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad usa la propiedad de la escisión, la segunda se sigue de (a2-4) de la Definición 1.2.4 y la tercera de (1.2).

Por el mismo argumento:

$$
p_{B_D,B_D} \circ t'_{B_D,B_D} \circ i_{B_D,B_D} \circ p_{B_D,B_D} \circ t_{B_D,B_D} \circ i_{B_D,B_D} = 1_{B_D\times B_D}. \tag{5.23}
$$

La prueba de (a3-2) de la Definición 1.2.4 puede realizarse como sigue:

$$
\begin{aligned}
& t'_{B_D,B_D} \circ \nabla_{B_D\otimes B_D} \\
&= t'_{B_D,B_D} \circ ((\varphi_{B_D} \circ s'_{B_D}) \otimes B_D) \circ (B_D \otimes \lambda_D^{-1} \otimes B_D) \circ ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes \varrho_{B_D}) \\
&\quad \circ (i_D^B \otimes ((\Pi_B^L \otimes p_D^B) \circ \delta_B \circ i_D^B)) \\
&= ((p_D^B \otimes p_D^B) \circ t'_{B,B} \circ (i_D^B \otimes i_D^B)) \circ ((p_D^B \circ \mu_B \circ (f \otimes i_D^B)) \otimes B_D) \\
&\quad \circ (((g \otimes p_D^B) \circ t'_{B,B} \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D^{-1}))) \otimes B_D) \circ ((q_D^B \circ \mu_B) \otimes ((g \otimes p_D^B) \circ \delta_B)) \\
&\quad \circ (i_D^B \otimes ((\overline{\Pi}_B^L \otimes q_D^B) \circ \delta_B \circ i_D^B)) \\
&= (p_D^B \otimes p_D^B) \circ t'_{B,B} \circ ((\mu_B \circ t'_{B,B}) \otimes B) \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D^{-1} \circ g \circ \mu_B \circ (\overline{\Pi}_B^R \otimes B)) \otimes B)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\circ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B))\\
&= (p_D^B \otimes p_D^B) \circ t'_{B,B} \circ ((\mu_B \circ t'_{B,B}) \otimes B)\\
&\circ(B \otimes (\mu_B \circ t'_{B,B} \circ ((f \circ \lambda_D^{-1} \circ g \circ \overline{\Pi}_B^R) \otimes (f \circ \lambda_D^{-1} \circ g))) \otimes B)\\
&\circ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B))\\
&= (p_D^B \otimes p_D^B) \circ t'_{B,B} \circ (\mu_B \otimes B) \circ (\mu_B \otimes B \otimes B) \circ (B \otimes t'_{B,B} \otimes B)\\
&\circ(t'_{B,B} \otimes B \otimes B) \circ (B \otimes (t'_{B,B} \circ (\overline{\Pi}_B^L \otimes (f \circ \lambda_D^{-1} \circ g))) \otimes B)\\
&\circ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B))\\
&= (p_D^B \otimes p_D^B) \circ t'_{B,B} \circ ((\mu_B \circ t'_{B,B}) \otimes B)\\
&\circ((\mu_B \circ t'_{B,B} \circ (B \otimes \overline{\Pi}_B^L)) \otimes (f \circ \lambda_D^{-1} \circ g) \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B))\\
&= (p_D^B \otimes p_D^B) \circ t'_{B,B} \circ ((\mu_B \circ t'_{B,B}) \otimes B) \circ (B \otimes (f \circ \lambda_D^{-1} \circ g) \otimes B) \circ (i_D^B \otimes (\delta_B \circ i_D^B))\\
&= t'_{B_D,B_D}.
\end{aligned}
$$

En los cálculos anteriores, la primera igualdad se sigue de la Proposición 3.2.5 y (5.12), la segunda porque aplicando el Lema 5.1.10 y la igualdad

$$
q_D^B \circ \Pi_D^B = q_D^B \circ \overline{\Pi}_B^L \tag{5.24}
$$

se tiene que

$$
q_D^B \circ \mu_B \circ (B \otimes \Pi_B^L) = q_D^B \circ \mu_B \circ (B \otimes (q_D^B \circ \Pi_B^L)) = q_D^B \circ \mu_B \circ (B \otimes \overline{\Pi}_B^L).
$$

La tercera igualdad es consecuencia de (1.41) y (1.45). La cuarta igualdad es verdadera porque f y g son morfismos de álgebras y λ_B^{-1} es antimultiplicativo. La quinta es consecuencia de (b3-2) de la Definición 1.2.9 para B^{coop}, la Observación 5.1.4 y (1.34); la sexta se sigue por la asociatividad de μ_B, (a1) de la Definición 1.2.4 y (b3-2) de la Definición 1.2.9 para B^{coop}. La séptima igualdad se cumple ya que

$$
\begin{aligned}
&\mu_B \circ t'_{B,B} \circ (B \otimes \overline{\Pi}_B^L) \circ \delta_B\\
&= \mu_B \circ (B \otimes (\varepsilon_B \circ \mu_B) \otimes B) \circ ((\delta_B \circ \eta_B) \otimes (t'_{B,B} \circ \delta_B))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mu_B \otimes (\varepsilon_B \circ \mu_B)) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ ((\delta_B \circ \eta_B) \otimes \delta_B) \\
&= (B \otimes \varepsilon_B) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (\eta_B \otimes B) \\
&= id_B,
\end{aligned}
$$

y la octava hace uso de los Lemas 5.1.11 y 5.1.10, la definición de proyección y la caracterización (5.17). □

Teorema 5.3.2. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y (B, f, g) un objeto en $\mathcal{P}roj(D)$. El objeto B_D definido en la Proposición 5.1.7 es un AHTD con la estructura de álgebra-coálgebra $(B_D, \eta_{B_D}, \mu_{B_D}, \varepsilon_{B_D}, \delta_{B_D})$ dada en la Proposición 5.1.8, operador Yang-Baxter débil t_{B_D,B_D} con idempotente asociado ∇_{B_D,B_D} dados en la Proposición 5.3.1, y antípodo λ_{B_D} la factorización a través del diagrama igualador de la Proposición 5.1.7 del morfismo $(f \circ g) \wedge \lambda_B$.*

Prueba:
Por las Proposiciones 5.1.8 y 5.3.1, solo resta demostrar las condiciones (b1) a (b7) de la Definición 1.2.9.

La prueba de (b1-1) está dada por:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{B_D} \circ \nabla_{B_D,B_D} \\
&= ((\varepsilon_D \circ \mu_D \circ (g \otimes g)) \otimes (p_D^B \circ \mu_B \circ ((i_D^B \circ p_D^B) \otimes (i_D^B \circ p_D^B)))) \\
&\quad \circ (B \otimes (t_{B,B} \circ ((i_D^B \circ p_D^B) \otimes (f \circ g))) \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B)) \\
&= ((\varepsilon_B \circ \mu_B) \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B)) \\
&= (\varepsilon_B \otimes p_D^B) \circ \delta_B \otimes \mu_B \otimes (i_D^B \otimes i_D^B) \\
&= \mu_{B_D},
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue de la definición de Δ_{B_D,B_D} y la Proposición 3.2.5, la segunda de los 5.1.10 y 5.1.11 junto con las propiedades de la escisión, la condición (ii) de la Definición 5.1.1 y el carácter de morfismo de álgebras de g; la tercera de (b4) de la Definición 1.2.9 y la última de la propiedad de la counidad.

La condición (b1-2) de la Definición 1.2.9 se demuestra usando la descripción (5.12), el hecho de ser μ_{B_D} la factorización a través del igualador de la Proposición 5.1.7 del morfismo $\mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B)$, la asociatividad de μ_B y la parte (i) del Lema 5.1.10. En efecto:

$$\nabla_{B_D,B_D} \circ (\mu_{B_D} \otimes B_D)$$
$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes B_D) \circ (i_D^B \otimes ((\Pi_B^L \otimes p_D^B) \circ \delta_B \circ i_D^B) \circ (\mu_{B_D} \otimes B_D)$$
$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes B_D) \circ (i_D^B \otimes (\mu_B \circ (i_D^B \otimes \Pi_B^L)) \otimes p_D^B) \circ (B_D \otimes B_D \otimes (\delta_B \circ i_D^B))$$
$$= (\mu_{B_D} \otimes B_D) \circ (B_D \otimes \nabla_{B_D,B_D}).$$

Razonando del mismo modo pero aplicando ahora la descripción dada por (5.11) resulta (b1-3) de la Definición 1.2.9.

La prueba de las igualdades incluidas en (b2) de la Definición 1.2.9 se realiza siguiendo el mismo esquema empleado para demostrar (b1) de la Definición 1.2.9 pero intercambiando los papeles de las propiedades relativas a la estructura de álgebra y módulo por las correspondientes de coálgebra y comódulo respectivamente.

La prueba para (b3-1) de la Definición 1.2.9 es la siguiente:

$$(B_D \otimes \mu_{B_D}) \circ (t_{B_D,B_D} \otimes B_D) \circ (B_D \otimes t_{B_D,B_D})$$
$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes (\mu_{B_D} \circ (p_D^B \otimes p_D^B))) \circ ((f \circ g) \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ (\delta_B \otimes (q_D^B \circ \mu_B) \otimes B)$$
$$\circ (B \otimes (f \circ g) \otimes t_{B,B}) \circ (i_D^B \otimes (\delta_B \circ i_D^B) \otimes i_D^B)$$
$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes B \otimes \mu_B \otimes B)$$
$$\circ (B \otimes B \otimes B \otimes t_{B,B}) \circ ((((f \circ g) \otimes B) \circ \delta_B \circ i_D^B) \otimes (((f \circ g) \otimes B) \circ \delta_B \circ i_D^B) \otimes i_D^B)$$
$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ (B \otimes \mu_B \otimes B \otimes B) \circ (B \otimes B \otimes t_{B,B} \otimes B)$$
$$\circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B \otimes B) \circ (f \otimes B \otimes f \otimes t_{B,B})$$
$$\circ (((g \otimes B) \circ \delta_B \circ i_D^B) \otimes ((g \otimes B) \circ \delta_B \circ i_D^B) \otimes i_D^B)$$
$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes p_D^B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ ((f \circ g \circ \mu_B) \otimes \mu_B \otimes B)$$
$$\circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B) \otimes i_D^B)$$

$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes p_D^B) \circ ((f \circ g) \otimes t_{B,B}) \circ ((\delta_B \circ \mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B)) \otimes i_D^B)$$

$$= t_{B_D,B_D} \circ (\mu_{B_D} \otimes B_D),$$

donde las igualdades primera y segunda se deducen de los Lemas 5.1.11 y 5.1.10 junto con las propiedades de la escisión, la tercera es consecuencia de (b3-2) de la Definición 1.2.9 para B, en la cuarta se aplica la asociatividad de μ_B, la condición (ii) de la Definición 5.1.1, (b3-1) de la Definición 1.2.9 para B, el carácter de morfismos de álgebras de f y g y la condición (ii) de la Definición 5.1.1. La quinta igualdad es consecuencia de (b4) de la Definición 1.2.9 para B y la última del Lema 5.1.11, las propiedades de la escisión y la definición de t_{B_D,B_D}.

La condición (b3-2) de la Definición 1.2.9 puede deducirse análogamente.

En lo que respecta a (b3-3) y (b3-4) de la Definición 1.2.9, sus pruebas siguen la misma estrategia que las anteriores pero intercambiando las propiedades propias de álgebras por las de coálgebras.

La prueba de (b4) de la Definición 1.2.9 es:

$$((\mu_{B_D} \otimes \mu_{B_D}) \circ (B_D \otimes t_{B_D,B_D} \otimes B_D) \circ (\delta_{B_D} \otimes \delta_{B_D}))$$

$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ (B \otimes \mu_B \otimes B \otimes B)$$

$$\circ (q_D^B \otimes (f \circ g) \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes \delta_B \otimes B \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B))$$

$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ ((q_D^B \wedge (f \circ g)) \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B))$$

$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ ((id_B \wedge (f \circ \Pi_B^R \circ g)) \otimes t_{B,B} \otimes B)$$

$$\circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B))$$

$$= ((p_D^B \circ \mu_B) \otimes (p_D^B \circ \mu_B)) \circ ((id_B \wedge \Pi_B^R) \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ ((\delta_B \circ i_D^B) \otimes (\delta_B \circ i_D^B))$$

$$= (p_D^B \otimes p_D^B) \circ \delta_B \circ q_D^B \circ \mu_B \circ (i_D^B \otimes i_D^B)$$

$$= \delta_{B_D} \circ \mu_{B_D},$$

donde la primera igualdad es cierta por las definiciones de μ_{B_D}, δ_{B_D} y t_{B_D,B_D}, los Lemas 5.1.11 y 5.1.10, y las propiedades de la escisión, la segunda por la asociatividad de μ_B y la coasociatividad de δ_B, la tercera por la fórmula

$$q_D^B \wedge (f \circ g) = id_B \wedge (f \circ \Pi_D^R \circ g), \tag{5.25}$$

que se obtiene aplicando la asociatividad de μ_B y la coasociatividad de δ_B, el carácter de morfismo de coálgebras de g y de morfismo de álgebras f junto con (1.29).

Volviendo a las igualdades de la demostración, en la cuarta se usa la Observación 5.1.4, en la quinta (1.30), (b4) de la Definición 1.2.9 para B y la Observación 5.1.9; en la sexta la Proposición 5.1.8.

Probemos ahora (b5) de la Definición 1.2.9. La primera de las igualdades de las que consta puede demostrarse como sigue:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{B_D} \circ \mu_{B_D} \circ (B_D \otimes \mu_{B_D}) \\
&= \varepsilon_B \circ q_D^B \circ \mu_B \circ (B \otimes \mu_B) \circ (i_D^B \otimes i_D^B \otimes i_D^B) \\
&= \varepsilon_B \circ \mu_B \circ (B \otimes \mu_B) \circ (i_D^B \otimes i_D^B \otimes i_D^B) \\
&= ((\varepsilon_B \circ \mu_B) \otimes (\varepsilon_B \circ \mu_B)) \circ (B \otimes \delta_B \otimes B) \circ (i_D^B \otimes i_D^B \otimes i_D^B) \\
&= ((\varepsilon_B \circ q_D^B \circ \mu_B) \otimes (\varepsilon_B \circ q_D^B \circ \mu_B)) \circ (B \otimes ((q_D^B \otimes q_D^B) \circ \delta_B) \otimes B) \circ (i_D^B \otimes i_D^B \otimes i_D^B) \\
&= ((\varepsilon_{B_D} \circ \mu_{B_D}) \otimes (\varepsilon_{B_D} \circ \mu_{B_D})) \circ (B_D \otimes \delta_{B_D} \otimes B_D),
\end{aligned}
$$

donde la primera identidad se sigue porque ε_{B_D} es la factorización por el coigualador p_D^B de $\varepsilon_B \circ i_D^B$ y el Lema 5.1.10, la segunda se obtiene por la fórmula

$$
\varepsilon_B \circ \mu_B \circ (B \otimes q_D^B) = \varepsilon_B \circ \mu_B, \tag{5.26}
$$

que es consecuencia del Lema 5.1.10 y la igualdad $\varepsilon_B = \varepsilon_B \circ q_D^B$. En la tercera identidad se usa (b5) de la Definición 1.2.9 para B, en la cuarta (5.26) y el Lema 5.1.10, en la quinta la Proposición 5.1.8.

En cuanto a la segunda igualdad de (b5) de la Definición 1.2.9 su demostración es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&((\varepsilon_{B_D} \circ \mu_{B_D}) \otimes (\varepsilon_{B_D} \circ \mu_{B_D})) \circ (B_D \otimes (t'_{B_D,B_D} \circ \delta_{B_D}) \otimes B_D) \\
&= ((\varepsilon_B \circ \mu_B) \otimes (\varepsilon_B \circ \mu_B)) \circ (B \otimes t'_{B,B} \otimes B) \circ (B \otimes (q_D^B \circ \mu_B \circ t'_{B,B}) \otimes B \otimes B)) \\
&\quad \circ (B \otimes B \otimes (f \circ \lambda_D^{-1} \circ g) \otimes B \otimes B) \circ (B \otimes \delta_B \otimes B \otimes B) \circ (i_D^B \otimes (\delta_B \circ i_D^B) \otimes i_D^B) \\
&= ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \otimes (\varepsilon_D \circ \mu_D)) \circ (D \otimes t'_{D,D} \otimes D) \circ (D \otimes \Pi_D^L \otimes D \otimes D)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\circ(D\otimes(\mu_D\circ t'_{D,D}\circ(D\otimes\lambda_D^{-1})\circ\delta_D)\otimes D\otimes D)\\
&\circ(D\otimes g\otimes g\otimes D)\circ((g\circ i_D^B)\otimes(\delta_B\circ i_D^B)\otimes(g\circ i_D^B))\\
&=((\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes(\varepsilon_D\circ\mu_D))\circ(D\otimes t'_{D,D}\otimes D)\circ(D\otimes\overline{\Pi}_D^R\otimes D\otimes D)\\
&\circ(D\otimes\delta_D\otimes D)\circ((g\circ i_D^B)\otimes(g\circ i_D^B)\otimes(g\circ i_D^B))\\
&=((\varepsilon_B\circ\mu_B)\otimes(\varepsilon_B\circ\mu_B))\circ(B\otimes t'_{B,B}\otimes B)\circ(B\otimes\overline{\Pi}_B^R\otimes B\otimes B)\\
&\circ(i_D^B\otimes(\delta_B\circ i_D^B))\otimes i_D^B)\\
&=((\varepsilon_B\circ\mu_B)\otimes(\varepsilon_B\circ\mu_B))\circ(B\otimes t'_{B,B}\otimes B)\circ(i_D^B\otimes(\delta_B\circ i_D^B))\otimes i_D^B)\\
&=\varepsilon_B\circ\mu_B\circ(B\otimes\mu_B)\circ(i_D^B\otimes i_D^B\otimes i_D^B)\\
&=\varepsilon_{B_D}\circ\mu_{B_D}\circ(B_D\otimes\mu_{B_D}),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se obtiene a partir de las definiciones de ε_{B_D}, μ_{B_D}, δ_{B_D} y t'_{B_D,B_D}, el Lema 5.1.11, las condiciones de la escisión, el Lema 5.1.10 y la condición (ii) de la Definición 5.1.1. En la segunda igualdad se aplican las propiedades de morfismo de (co)álgebra para g y las identidades $g\circ q_D^B=\Pi_D^L\circ g$, $g\circ f=id_D$. La tercera es cierta por ser g morfismo de coálgebras, (1.31) y

$$\overline{\Pi}_D^R=\mu_D\circ t'_{D,D}\circ(D\otimes\lambda_D^{-1})\circ\delta_D. \tag{5.27}$$

La cuarta igualdad es consecuencia del carácter de morfismo de AHTD de g, la quinta se sigue de (1.38), (1.32) y (1.50); la sexta de (b5) de la Definición 1.2.9 para B y la última por la Proposición 5.1.8.

La condición (b6) de la Definición 1.2.9 se prueba razonando de forma similar, pero intercambiando los papeles de las propiedades de álgebra y coálgebra entre sí.

Como hemos dicho en el enunciado, λ_{B_D} es el único morfismo tal que

$$i_D^B\circ\lambda_{B_D}=((f\circ g)\wedge\lambda_B)\circ i_D^B. \tag{5.28}$$

Está bien definido gracias a la propiedad universal del diagrama igualador de la Proposición 5.1.7 ya que:

$$(B\otimes g)\circ\delta_B\circ\mu_B\circ((f\circ g)\otimes\lambda_B)\circ\delta_B\circ i_D^B$$

$$= (B\otimes g)\circ(\mu_B\otimes\mu_B)\circ(B\otimes t_{B,B}\otimes B)\circ(\delta_B\otimes\delta_B)\circ((f\circ g)\otimes\lambda_B)\circ\delta_B\circ i_D^B$$

$$= (\mu_B\otimes(\mu_D\circ(g\otimes g)))\circ((f\circ g)\otimes t_{B,B}\otimes B)\circ(B\otimes(f\circ g)\otimes B\otimes B)$$

$$\circ(\delta_B\otimes((t_{B,B}\circ(\lambda_B\otimes\lambda_B)\circ\delta_B)))\circ\delta_B\circ i_D^B$$

$$= (\mu_B\otimes g)\circ((f\circ g)\otimes(t_{B,B}\circ(\Pi_B^L\otimes\lambda_B))\circ(\delta_B\otimes B)\circ\delta_B\circ i_D^B$$

$$= (\mu_B\otimes g)\circ((f\circ g)\otimes t_{B,B})\circ(B\otimes(\Pi_B^L\circ\Pi_B^L)\otimes\lambda_B)\circ(\delta_B\otimes B)\circ\delta_B\circ i_D^B$$

$$= (\mu_B\otimes(\Pi_D^L\circ g))\circ((f\circ g)\otimes t_{B,B})\circ(B\otimes\Pi_B^L\otimes\lambda_B)\circ(\delta_B\otimes B)\circ\delta_B\circ i_D^B$$

$$= (\mu_B\otimes(\Pi_D^L\circ\mu_D\circ(g\otimes g)))\circ((f\circ g)\otimes t_{B,B}\otimes B)\circ(B\otimes(f\circ g)\otimes B\otimes B)$$

$$\circ(\delta_B\otimes((t_{B,B}\circ(\lambda_B\otimes\lambda_B)\circ\delta_B)))\circ\delta_B\circ i_D^B$$

$$= (B\otimes(\Pi_D^L\circ g))\circ(\mu_B\otimes\mu_B)\circ(B\otimes t_{B,B}\otimes B)\circ(\delta_B\otimes\delta_B)\circ((f\circ g)\otimes\lambda_B)\circ\delta_B\circ i_D^B$$

$$= (B\otimes(\Pi_D^L\circ g))\circ\delta_B\circ\mu_B\circ((f\circ g)\otimes\lambda_B)\circ\delta_B\circ i_D^B,$$

donde las igualdades primera y última se deducen de (b4) de la Definición 1.2.9 para B, la segunda y la séptima del carácter de morfismo de (co)álgebras de f y g, la antimultiplicatividad del antípodo, la condición (i) de la Definición 5.1.1 y la identidad $g\circ f = id_D$. Las igualdades tercera y sexta son consecuencia de la coasociatividad de δ_B, (1.53), el carácter de morfismo de álgebras de g, la condición (i) de la Definición 5.1.1, la identidad $g\circ f = id_D$ y (b3-1) de la Definición 1.2.9 para B. En la cuarta se usa el carácter idempotente de Π_B^L y en la quinta la Observación 5.1.4.

Por lo tanto, componiendo con p_D^B en (5.28) obtenemos que:

$$\lambda_{B_D} = p_D^B\circ((f\circ g)\wedge\lambda_B)\circ i_D^B. \tag{5.29}$$

El morfismo λ_{B_D} cumple las condiciones de antípodo. Probemos en primer lugar (b7-1) de la Definición 1.2.9. En efecto:

$$\mu_{B_D}\circ(B_D\otimes\lambda_{B_D})\circ\delta_{B_D}$$

$$= p_D^B\circ\mu_B\circ((q_D^B\wedge(f\circ g))\otimes\lambda_B)\circ\delta_B\circ i_D^B$$

$$= p_D^B\circ\Pi_B^L\circ i_D^B$$

$$
\begin{aligned}
&= ((\varepsilon_B \circ \mu_B) \otimes p_D^B) \circ ((q_D^B \wedge (f \circ g)) \otimes t_{B,B}) \circ ((\delta_B \circ \eta_B) \otimes i_D^B) \\
&= ((\varepsilon_B \circ q_D^B \circ \mu_B) \otimes p_D^B) \circ (q_D^B \otimes (q_D^B \circ \mu_B) \otimes B)) \circ (B \otimes (f \circ g) \otimes t_{B,B}) \\
&\quad \circ (B \otimes B \otimes q_D^B \otimes B) \circ (B \otimes (\delta_D \circ q_D^B) \otimes B) \circ ((\delta_B \circ q_D^B \circ \eta_B) \otimes i_D^B) \\
&= ((\varepsilon_{B_D} \circ \mu_{B_D}) \otimes B_D) \circ (B_D \otimes t_{B_D,B_D}) \circ ((\delta_{B_D} \circ \eta_{B_D}) \otimes B_D),
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue por las definiciones de μ_{B_D}, δ_{B_D} y λ_{B_D}, el Lema 5.1.10, la asociatividad de μ_B y la coasociatividad de δ_B, la segunda se obtiene gracias a (1.29) y la fórmula

$$q_D^B \wedge (f \circ g) = id_B, \tag{5.30}$$

siendo ésta a su vez consecuencia de (5.25) y (1.30). La tercera igualdad se consigue por la definición de Π_D^L y (5.30); la cuarta por la coasociatividad de δ_B, la Proposición 5.1.8, el Lema 5.1.10, (5.30) y las igualdades

$$\varepsilon_B \circ q_D^B = \varepsilon_B \text{ y } q_D^B \circ \eta_B = \eta_B. \tag{5.31}$$

Para demostrar (b7-2) de la Definición 1.2.9 probaremos primero que

$$i_D^B \circ \lambda_{B_D} \circ p_D^B = (f \circ g) \wedge \lambda_B. \tag{5.32}$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
&i_D^B \circ \lambda_{B_D} \circ p_D^B \\
&= q_D^B \circ \mu_B \circ ((f \circ g) \otimes \lambda_B) \circ (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \circ (\delta_B \otimes (\delta_B \circ f \circ \lambda_B \circ g)) \circ \delta_B \\
&= \mu_B \circ (\mu_B \otimes \mu_B) \circ ((f \circ g) \otimes B \otimes ((\lambda_B \otimes \lambda_B) \circ t_{B,B})) \circ (B \otimes t_{B,B} \otimes B) \\
&\quad \circ (\delta_B \otimes (\delta_B \circ \lambda_B \circ f \circ g)) \circ \delta_B \\
&= \mu_B \circ (\mu_B \otimes B) \circ ((f \circ g) \otimes \Pi_B^L \otimes B) \circ (B \otimes t_{B,B}) \circ (B \otimes \lambda_B \otimes B) \\
&\quad \circ (\delta_B \otimes (\lambda_B \circ f \circ g)) \circ \delta_B \\
&= \mu_B \circ (B \otimes (\Pi_B^L \wedge id_B)) \circ ((f \circ g) \otimes \lambda_B) \circ \delta_B \\
&= (f \circ g) \wedge \lambda_B,
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue de (b4) de la Definición 1.2.9 para B, la segunda de la antimultiplicatividad del antípodo, (1.53), (1.54), el carácter de morfismos de AHTD de f y g y la condición (ii) de la Definición 5.1.1. La tercera igualdad es cierta por (b3-3) de la Definición 1.2.9, la asociatividad de μ_B y (1.29), la cuarta por el carácter de morfismos de AHTD de f y g, (1.36), (1.33), la asociatividad de μ_B, la coasociatividad de δ_B y la antimultiplicatividad del antípodo; la quinta es consecuencia de (1.30).

Pasemos ahora a probar (b7-2) de la Definición 1.2.9. En efecto:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{B_D} \circ (\lambda_{B_D} \otimes B_D) \circ \delta_{B_D} \\
&= p_D^B \circ \mu_B \circ (((f \circ g) \wedge \lambda_B) \otimes B) \circ \delta_B \circ i_D^B \\
&= p_D^B \circ \mu_B \circ ((f \circ g) \otimes \Pi_B^R) \circ \delta_B \circ i_D^B \\
&= (B_D \otimes (\varepsilon_{B_D} \circ \mu_{B_D})) \circ (t_{B_D,B_D} \otimes B_D) \circ (B_D \otimes (\delta_{B_D} \circ \eta_{B_D})),
\end{aligned}
$$

siendo la primera igualdad cierta gracias a la Proposición 5.1.8, el Lema 5.1.10 y (5.32), la segunda por la asociatividad de μ_B, la coasociatividad de δ_B y (1.29), la tercera por la definición de Π_B^R, (5.31) y el Lema 5.1.10.

Por último, la prueba de (b7-3) de la Definición 1.2.9 es:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{B_D} \wedge \ id_{B_D} \wedge \lambda_{B_D} \\
&= p_D^B \circ ((f \circ g) \wedge \lambda_B \wedge q_D^B \wedge (f \circ g) \wedge \lambda_B) \circ i_D^B \\
&= p_D^B \circ ((f \circ g) \wedge \lambda_B \wedge id_B \wedge \lambda_B) \circ i_D^B \\
&= p_D^B \circ ((f \circ g) \wedge \lambda_B) \circ i_D^B \\
&= \lambda_{B_D},
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad es cierta por las definiciones de λ_{B_D}, μ_{B_D} y δ_{B_D}, además del Lema 5.1.10; la segunda igualdad por (5.30). La tercera se sigue de (b7-3) de la Definición 1.2.9 y la última por la definición de λ_{B_D}. $\square$

5.4. El teorema de proyección de Radford en el caso trenzado

Esta sección centra la atención en el caso particular donde $(\mathcal{C}, \otimes, K, c, c^{-1})$ es una categoría monoidal trenzada estricta. Se usarán los resultados previos para probar que si H es un álgebra de Hopf débil (véase (1) de Ejemplos 1.2.10) con antípodo inversible, entonces la categoría de las álgebras de Hopf sobre la categoría de los módulos Yetter-Drinfeld izquierda izquierda sobre H es equivalente a la de las proyecciones de álgebras de Hopf débiles sobre H.

5.4.1. Recuérdese que en el caso trenzado, si H es un AHD (véase (1) de Ejemplos 1.2.10) y M es un objeto de la categoría $\mathcal{C}$, entonces siempre existe un (M, H)-OD (r_M, r'_M, s_M, s'_M) con

$$r_M = c_{M,H}, \quad r'_M = c^{-1}_{M,H}, \quad s_M = c_{H,M}, \quad s'_M = c^{-1}_{H,M},$$

que gracias a la naturalidad de la trenza de $\mathcal{C}$ será trivialmente compatible con cualquier posible estructura de módulo o de comódulo sobre M, y cualquier morfismo entre objetos satisfará que

$$r_N \circ (f \otimes D) = (D \otimes f) \circ r_M \text{ y } s_N \circ (D \otimes f) = (f \otimes D) \circ s_M.$$

Además, para este (M, D)-OD todos los ∇-morfismos son identidades pues se definen como la composición de la trenza con su inverso.

5.4.2. Como en el caso general, se denotará por ${}^H_H\mathcal{YD}$ la categoría de los módulos Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre H y dado $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ un objeto en ${}^H_H\mathcal{YD}$ se tomará, salvo indicación expresa de lo contrario, el (M, D)-OD indicado en 5.4.1. Aunque el triple (H, μ_H, δ_H) no sea en general un módulo Yetter-Drinfeld pueden también definirse los morfismos idempotentes:

$$\nabla_{M \otimes H} : M \otimes H \to M \otimes H$$

dado por

$$\nabla_{M \otimes H} = (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (H \otimes c_{H,M} \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes M \otimes H),$$

y

$$\Delta_{M \otimes H} : M \otimes H \to M \otimes H$$

dado por

$$\Delta_{M\otimes H} = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes M \otimes H) \circ (H \otimes c_{M,H} \otimes H) \circ (\varrho_M \otimes \delta_H).$$

Nótese en primer lugar que por ser los ∇-morfismos identidades, siguiendo los mismos argumentos que en la Proposición 3.2.5, con la única salvedad de aplicar ahora (1.45) en vez de (vi) de la Observación 3.1.8, se obtiene que

$$\nabla_{M\otimes H} = \Delta_{M\otimes H}. \tag{5.33}$$

En concordancia con la notación introducida en el párrafo 3.2.6 se denota por $M \times H$ a la imagen del idempotente $\nabla_{M\otimes H}$ y por

$$p_{M\otimes H} : M \otimes H \to M \times H, \qquad i_{M\otimes H} : M \times H \to M \otimes H,$$

los morfismos tales que $i_{M\otimes H} \circ p_{M\otimes H} = \nabla_{M\otimes H}$ y $p_{M\otimes H} \circ i_{M\otimes H} = id_{M\times H}$.

Usando los mismos argumentos que en el Lema 3.2.9, aunque ahora las propiedades relativas al (M, D)-OD son simplemente la naturalidad de la trenza, se obtiene que

$$\varphi_{M\otimes H} \circ (H \otimes \nabla_{M\otimes H}) = \varphi_{M\otimes H} = \nabla_{M\otimes H} \circ \varphi_{M\otimes H} \tag{5.34}$$

y

$$\varrho_{M\otimes H} \circ \nabla_{M\otimes H} = \varrho_{M\otimes H} = (H \otimes \nabla_{M\otimes H}) \circ \varrho_{M\otimes H}, \tag{5.35}$$

con

$$\varphi_{M\otimes H} = (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (H \otimes c_{H,M} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes M \otimes H)$$

y

$$\varrho_{M\otimes H} = (\mu_H \otimes M \otimes H) \circ (H \otimes c_{M,H} \otimes H) \circ (\varrho_M \otimes \delta_H).$$

5.4.3. Sea H un AHD con antípodo inversible en $\mathcal{C}$. Como caso particular de los resultados probados en la Sección 2 del Capítulo 3, se cumple que ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ es una categoría monoidal no estricta.

En este caso los isomorfismos naturales de unidad están dados por:

$$\mathfrak{l}_M = \varphi_M \circ (i_L \otimes M) \circ i_{H_L\otimes M} : H_L \times M \to M, \tag{5.36}$$

$$\mathfrak{r}_M = \varphi_M \circ c^{-1}_{H,M} \circ (M \otimes (\overline{\Pi}^{L}_{H} \circ i_L)) \circ i_{M\otimes H_L} : M \times H_L \to M, \tag{5.37}$$

siendo sus inversos

$$\mathfrak{l}_M^{-1} = p_{H_L \otimes M} \circ (p_L \otimes \varphi_M) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes M) : M \to H_L \times M, \tag{5.38}$$

$$\mathfrak{r}_M^{-1} = p_{M \otimes H_L} \circ (\varphi_M \otimes p_L) \circ (H \otimes c_{H,M}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes M) : M \to M \times H_L. \tag{5.39}$$

Los isomorfismos naturales de asociatividad

$$\mathfrak{a}_{M,N,P} : M \times (N \times P) \to (M \times N) \times P \tag{5.40}$$

están dados por

$$\mathfrak{a}_{M,N,P} = p_{(M \times N) \otimes P} \circ (p_{M \otimes N} \otimes P) \circ (M \otimes i_{N \otimes P}) \circ i_{M \otimes (N \times P)}, \tag{5.41}$$

con inversos

$$\mathfrak{a}_{M,N,P}^{-1} : (M \times N) \times P \to M \times (N \times P)$$

dados por

$$\mathfrak{a}_{M,N,P}^{-1} := p_{M \otimes (N \times P)} \circ (M \otimes p_{N \otimes P}) \circ (i_{M \otimes N} \otimes P) \circ i_{(M \times N) \otimes P}. \tag{5.42}$$

A continuación se demuestra que en este caso la categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$ es además trenzada. Para ello son previamente introducidos los morfismos que darán la trenza y sus propiedades fundamentales.

5.4.4. Sea H un AHD en $\mathcal{C}$. Sean $(M, \varphi_M, \varrho_M)$, $(M, \varphi_N, \varrho_N)$ dos objetos de ${}^H_H\mathcal{YD}$. Se definen los morfismos

$$t_{M,N} = (\varphi_N \otimes M) \circ (H \otimes c_{M,N}) \circ (\varrho_M \otimes N) : M \otimes N \to N \otimes M \tag{5.43}$$

y

$$t'_{M,N} = c_{M,N}^{-1} \circ (\varphi_N \otimes M) \circ (c_{H,N}^{-1} \otimes M) \circ (N \otimes \lambda_H^{-1} \otimes M) \circ (N \otimes \varrho_M). \tag{5.44}$$

Lema 5.4.5. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y $(M, \varphi_M, \varrho_M)$, $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ dos objetos en ${}^H_H\mathcal{YD}$. Entonces, si $t_{M,N}$ y $t'_{M,N}$ son respectivamente los morfismos definidos en (5.43) y (5.44), se cumple que:*

(i) $t_{M,N} \circ \nabla_{M \otimes N} = \nabla_{N \otimes M} \circ t_{M,N} = t_{M,N}$,

(ii) $t'_{M,N} \circ \nabla_{N \otimes M} = \nabla_{M \otimes N} \circ t'_{M,N} = t'_{M,N}$.

Prueba:
Para probar (i) comenzaremos demostrando que $t_{M,N} \circ \nabla_{M\otimes N} = t_{M,N}$. En efecto, usando que $\nabla_{M\otimes N} = \Delta_{M\otimes N}$, la naturalidad de la trenza, la condición de H-comódulo de M y que por (yd1-ii)

$$\varphi_M = \varphi_M \circ (H \otimes (\varphi_M \circ (\Pi_H^L \otimes M) \circ \varrho_M)),$$

resulta:

$$\begin{aligned}
& t_{M,N} \circ \nabla_{M\otimes N} \\
&= ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes ((\varphi_N \otimes M) \circ (H \otimes c_{M,N}) \circ (\varrho_M \otimes N))) \circ (H \otimes c_{M,H} \otimes N) \\
&\quad \circ (\varrho_M \otimes \varrho_N) \\
&= ((((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes \varphi_N) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes N) \circ (\delta_H \otimes \varrho_N)) \otimes M) \circ (H \otimes c_{M,N}) \\
&\quad \circ (\varrho_M \otimes N) \\
&= t_{M,N}.
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
& \nabla_{N\otimes M} \circ t_{M,N} \\
&= (\varphi_N \otimes \varphi_M) \circ (H \otimes c_{H,N} \otimes M) \\
&\quad \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes ((\varphi_N \otimes M) \circ (H \otimes c_{M,N}) \circ (\varrho_M \otimes N))) \\
&= (\varphi_N \otimes M) \circ (H \otimes c_{M,N}) \circ (((\mu_H \otimes \varphi_M) \circ (H \otimes c_{H,H} \circ \varrho_M) \\
&\quad \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes M)) \otimes N) \\
&= t_{M,N},
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue por la definición de $\nabla_{M\otimes N}$ y la de $t_{M,N}$ dada en (5.43), la segunda por la naturalidad de la trenza y la condición de H-módulo para M, y la tercera por (yd1-ii).

Para demostrar el apartado (ii), nótese primero que en general, gracias a (vi) de la Observación 3.1.8 y a las Proposiciones 2.1.13 y 2.1.12 resulta

$$\nabla_{M\otimes N} = ((\varphi_M \circ (\overline{\Pi}_H^L \otimes M) \circ c_{H,M}^{-1}) \otimes N) \circ (M \otimes \varrho_N), \tag{5.45}$$

mientras que usando (vii) de la Observación 3.1.8 resulta:

$$\nabla_{M\otimes N} = ((M \otimes \varphi_N) \circ (((M \otimes \overline{\Pi}_H^R) \circ c_{M,H}^{-1} \circ \varrho_M) \otimes N). \tag{5.46}$$

Una vez obtenida esta caracterización, la prueba de la primera igualdad de (ii) puede realizarse como sigue:

$$\begin{aligned}
&t'_{M,N} \circ \nabla_{N\otimes M}\\
&= c_{M,N}^{-1} \circ (\varphi_N \otimes M) \circ (c_{H,N}^{-1} \otimes M) \circ (N \otimes \lambda_H^{-1} \otimes M) \circ (N \otimes \varrho_M)\\
&\circ((\varphi_N \circ (\overline{\Pi}_H^L \otimes N) \circ c_{H,N}^{-1}) \otimes M) \circ (N \otimes \varrho_M)\\
&= c_{M,N}^{-1} \circ (\varphi_N \otimes M) \circ (c_{H,N}^{-1} \otimes M) \circ (N \otimes (\mu_H \circ (\lambda_H^{-1} \otimes \overline{\Pi}_H^L) \circ c_{H,H}^{-1}\\
&\circ\delta_H) \otimes M) \circ (N \otimes \varrho_M)\\
&= t'_{M,N},
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es la particularización al caso trenzado de (5.45), la segunda se obtiene por la naturalidad de la trenza y el carácter de H-comódulo de M y en la tercera se aplica la igualdad

$$\mu_H \circ (\lambda_H^{-1} \otimes \overline{\Pi}_H^L) \circ c_{H,H}^{-1} \circ \delta_H = \lambda_H^{-1}, \tag{5.47}$$

es decir, la condición (b7-3) de la Definición 1.2.9 para H^{coop}.

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{M\otimes N} \circ t'_{M,N}\\
&= (M\otimes\varphi_N)\circ(((M\otimes\overline{\Pi}_H^R)\circ c_{M,H}^{-1}\circ\varrho_M)\otimes N)\circ c_{M,N}^{-1}\circ(\varphi_N\otimes M)\circ(c_{H,N}^{-1}\otimes M)\\
&\circ(N \otimes \lambda_H^{-1} \otimes M) \circ (N \otimes \varrho_M)\\
&= c_{M,N}^{-1} \circ ((\varphi_N \circ (H \otimes \varphi_N)) \otimes M) \circ (((c_{H,H}^{-1} \otimes N) \circ (H \otimes c_{H,N}^{-1})\\
&\circ(c_{H,N}^{-1} \otimes H)) \otimes M) \circ (N \otimes \lambda_H^{-1} \otimes \overline{\Pi}_H^R \otimes M) \circ (N \otimes \delta_H \otimes M) \circ (N \otimes \varrho_M)\\
&= c_{M,N}^{-1} \circ (\varphi_N \otimes M) \circ (c_{H,N}^{-1} \otimes M)\\
&\circ(N \otimes (\mu_H \circ c_{H,H}^{-1} \circ (\lambda_H^{-1} \otimes \overline{\Pi}_H^R) \circ \delta_H) \otimes M) \circ (N \otimes \varrho_M)
\end{aligned}$$

$$= t'_{M,N},$$

donde la primera igualdad es la particularización al caso trenzado de la igualdad (5.46), la segunda se obtiene por la naturalidad de la trenza y la condición de H-comódulo de M, la tercera por la condición de módulo de N y naturalidad de la trenza; en la cuarta se usa la fórmula

$$\mu_H \circ c^{-1}_{H,H} \circ (\lambda^{-1}_H \otimes \overline{\Pi}^R_H) \circ \delta_H = \lambda^{-1}_H, \tag{5.48}$$

que es la expresión de la condición (b7-3) de la Definición 1.2.9 para H^{op}. □

Teorema 5.4.6. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible en una categoría monoidal trenzada $\mathcal{C}$ con trenza c. Entonces la categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$ es monoidal trenzada.*

Prueba:
En el párrafo 5.4.3 se justifica la razón por la cual ${}^H_H\mathcal{YD}$ es monoidal. Por lo tanto, solo resta construir una trenza para la categoría. Ésta viene dada por

$$\tau_{M,N} = p_{N\otimes M} \circ t_{M,N} \circ i_{M\otimes N} : M \times N \to N \times M \tag{5.49}$$

donde $t_{M,N}$ es el morfismo introducido en (5.43).

Se cumple la naturalidad de $\tau_{-,-}$ pues si $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ son dos morfismos en ${}^H_H\mathcal{YD}$ entonces:

$$\begin{aligned}
&\tau_{M',N'} \circ (f \times g)\\
&= p_{N'\otimes M'} \circ (\varphi_{N'} \otimes M') \circ (H \otimes c_{M',N'}) \circ (\varrho_{M'} \otimes N') \circ \nabla_{M'\otimes N'} \circ (f \otimes g) \circ i_{M\otimes N}\\
&= p_{N'\otimes M'} \circ (\varphi_{N'} \otimes M') \circ (H \otimes c_{M',N'}) \circ (\varrho_{M'} \otimes N') \circ (f \otimes g) \circ i_{M\otimes N}\\
&= p_{N'\otimes M'} \circ \nabla_{N'\otimes M'} \circ (g \otimes f) \circ (\varphi_N \otimes M) \circ (H \otimes c_{M,N}) \circ (\varrho_M \otimes N) \circ i_{M\otimes N}\\
&= p_{N'\otimes M'} \circ (g \otimes f) \circ \nabla_{M\otimes N} \circ t_{M,N} \circ i_{M\otimes N}\\
&= (g \times f) \circ \tau_{M,N},
\end{aligned}$$

donde las igualdades primera y última son consecuencia de las definiciones de $\tau_{-,-}$ y $f \times g$, la segunda y la cuarta son ciertas por la Observación 3.2.2 y las propiedades de la escisión; la tercera se cumple por el carácter de morfismo de comódulos de f y de módulos de g junto con la naturalidad de la trenza.

Mediante argumentos similares a los desarrollados en el Capítulo 3 se obtiene también que:

$$\mathfrak{a}_{P,M,N} \circ \tau_{M\times N,P} \circ \mathfrak{a}_{M,N,P} = (\tau_{M,P} \times N) \circ \mathfrak{a}_{M,P,N} \circ (M \times \tau_{N,P}) \tag{5.50}$$

y

$$\mathfrak{a}^{-1}_{N,P,M} \circ \tau_{M,N\times P} \circ \mathfrak{a}^{-1}_{M,N,P} = (N \times \tau_{M,P}) \circ \mathfrak{a}^{-1}_{N,M,P} \circ (\tau_{M,N} \times P). \tag{5.51}$$

Finalmente, $\tau_{M,N}$ es un isomorfismo con inverso dado por

$$\tau'_{M,N} = p_{M\otimes N} \circ t'_{M,N} \circ i_{N\otimes M} : N \times M \to M \times N \tag{5.52}$$

donde $t'_{M,N}$ es el morfismo establecido en (5.44).

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\tau'_{N,M} \circ \tau_{M,N}\\
&= p_{M\otimes N} \circ t'_{M,N} \circ \nabla_{N\otimes M} \circ t_{M,N} \circ i_{M\otimes N}\\
&= p_{M\otimes N} \circ c^{-1}_{M,N} \circ ((\varphi_N \circ c^{-1}_{H,N}) \otimes M) \circ (\varphi_N \otimes ((\lambda_H^{-1} \otimes M) \circ \varrho_M))\\
&\quad \circ (H \otimes c_{M,N}) \circ (\varrho_M \otimes N) \circ i_{M\otimes N}\\
&= p_{M\otimes N} \circ (M \otimes (\varphi_N \circ (\mu_H \otimes N))) \circ (((c^{-1}_{M,H} \otimes H) \circ (H \otimes c^{-1}_{M,H})) \otimes N)\\
&\quad \circ ((c^{-1}_{H,H} \circ (H \otimes \lambda_H^{-1}) \circ \delta_H) \otimes (c^{-1}_{M,N} \circ c_{M,N})) \circ (\varrho_M \otimes N) \circ i_{M\otimes N}\\
&= p_{M\otimes N} \circ (M \otimes \varphi_N) \circ (c^{-1}_{M,H} \otimes N) \circ (\overline{\Pi}^R_H \otimes M \otimes N) \circ (\varrho_M \otimes N) \circ i_{M\otimes N}\\
&= p_{M\otimes N} \circ \nabla_{M\otimes N} \circ i_{M\otimes N}\\
&= id_{M\times N},
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es cierta por (5.43) y (5.44), la segunda por el Lema 5.4.5, la tercera por la naturalidad de la trenza y la condición de comódulo de M y de módulo de N, la cuarta por la naturalidad de la trenza, la antimultiplicatividad de λ_H^{-1}, (1.29) y (1.32). La quinta es consecuencia de (5.46) y la sexta de las propiedades de la escisión.

Componiendo en el otro sentido se obtiene la igualdad

$$\tau_{M,N} \circ \tau'_{N,M} = id_{N \times M}$$

siguiendo el mismo esquema pero usando $\lambda_H^{-1} \circ \Pi_H^L = \overline{\Pi}_H^L$, (vi) de la Observación 3.1.8 y (1.27) en vez de $\lambda_H^{-1} \circ \Pi_H^R = \overline{\Pi}_H^R$, (vii) de la Observación 3.1.8 y (1.26) respectivamente. □

Proposición 5.4.7. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Si el triple $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ es un objeto de ${}_H^H\mathcal{YD}$, entonces el morfismo*

$$t_{M,M} : M \otimes M \to M \otimes M$$

definido en (5.43) es un operador Yang-Baxter débil.

Prueba:
La prueba de esta proposición es similar a de la Proposición 5.3.1. □

5.4.8. Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. De la misma forma que en el contexto simétrico (véase (1) de Ejemplos 1.2.6), en la categoría trenzada ${}_H^H\mathcal{YD}$ pueden a su vez considerarse las nociones de álgebra y coálgebra. En este sentido un objeto $(A, \varphi_A, \varrho_A) \in {}_H^H\mathcal{YD}$ se dice un álgebra si existen morfismos

$$u_A : H_L \to A, \qquad m_A : A \times A \to A$$

en ${}_H^H\mathcal{YD}$ tales que

$$m_A \circ (u_A \times A) \circ l_A^{-1} = id_A = m_A \circ (A \times u_A) \circ r_A^{-1}, \tag{5.53}$$

$$m_A \circ (m_A \times A) \circ \mathfrak{a}_{A,A,A} = m_A \circ (A \times m_A). \tag{5.54}$$

Por definición los morfismos u_A y m_A son de H-módulos y H-comódulos por la izquierda, por lo que cumplen las identidades

$$\varphi_A \circ (H \otimes u_A) = u_A \circ \varphi_{H_L}, \quad \varphi_A \circ (H \otimes m_A) = m_A \circ \varphi_{A \times A}, \tag{5.55}$$

$$\varrho_A \circ u_A = (H \otimes u_A) \circ \varrho_{H_L}, \quad \varrho_A \circ m_A = (H \otimes m_A) \circ \varrho_{A \times A}. \tag{5.56}$$

De modo análogo, un objeto $(C, \varphi_C, \varrho_C) \in {}_H^H\mathcal{YD}$ se dice una coálgebra si existen morfismos

$$e_C : C \to H_L, \qquad \Delta_C : C \to C \times C$$

en ${}_H^H\mathcal{YD}$ tales que

$$\mathfrak{l}_C \circ (e_C \times C) \circ \Delta_C = id_C = \mathfrak{r}_C \circ (C \times e_C) \circ \Delta_C, \tag{5.57}$$

$$(C \times \Delta_C) \circ \Delta_C = \mathfrak{a}_{C,C,C}^{-1} \circ (\Delta_C \times C) \circ \Delta_C. \tag{5.58}$$

Puesto que por definición los morfismos e_C y Δ_C son de H-módulos y H-comódulos por la izquierda satisfacen las identidades

$$e_C \circ \varphi_C = \varphi_{H_L} \circ (H \otimes e_C), \quad \Delta_C \circ \varphi_C = \varphi_{C\times C} \circ (H \otimes \Delta_C), \tag{5.59}$$

$$(H \otimes e_C) \circ \varrho_C = \varrho_{H_L} \circ e_C, \quad \varrho_{C\times C} \circ \Delta_C = (H \otimes \Delta_C) \circ \varrho_C. \tag{5.60}$$

Definición 5.4.9. Sea H un AHD en $\mathcal{C}$. Sea A un álgebra dotada de una estructura de H-módulo por la izquierda con acción φ_A y tal que

$$\varphi_A \circ (H \otimes \mu_A) = \mu_A \circ \varphi_{A\otimes A}. \tag{5.61}$$

El par (A, φ_A) se dice un H-módulo álgebra por la izquierda si satisface la igualdad

$$\varphi_A \circ (\overline{\Pi}_H^L \otimes \eta_A) = \varphi_A \circ (H \otimes \eta_A). \tag{5.62}$$

Si A es también un H-comódulo por la izquierda con coacción ϱ_A y tal que

$$\mu_{H\otimes A} \circ (\varrho_A \otimes \varrho_A) = \varrho_A \circ \mu_A \tag{5.63}$$

con $\mu_{H\otimes A} := (\mu_H \otimes \mu_A) \circ (H \otimes c_{H,A} \otimes A)$; entonces (A, ϱ_A) se dice un H-comódulo álgebra por la izquierda si se cumple la igualdad

$$(\Pi_H^R \otimes A) \circ \varrho_A \circ \eta_A = \varrho_A \circ \eta_A. \tag{5.64}$$

Sea C una coálgebra dotada además de una estructura de H-módulo por la izquierda con acción φ_C y tal que

$$\delta_C \circ \varphi_C = (\varphi_C \otimes \varphi_C) \circ \delta_{H\otimes C} \tag{5.65}$$

con $\delta_{H\otimes C} = (H \otimes c_{H,C} \otimes C) \circ (\delta_H \otimes \delta_C)$.

El par (C, φ_C) se dice un H-módulo coálgebra por la izquierda si

$$\varepsilon_C \circ \varphi_C \circ (\Pi_H^R \otimes C) = \varepsilon_C \circ \varphi_C. \tag{5.66}$$

Si C es un H-comódulo por la izquierda con una coacción ϱ_C satisfaciendo la identidad

$$(H \otimes \delta_C) \circ \varrho_C = \varrho_{C\otimes C} \circ \delta_C, \tag{5.67}$$

entonces el par (C, ϱ_C) se dice un H-comódulo coálgebra por la izquierda si

$$(\Pi_H^L \otimes \varepsilon_C) \circ \varrho_C = (H \otimes \varepsilon_C) \circ \varrho_C. \tag{5.68}$$

Siguiendo los mismos argumentos que los desarrollados para el caso simétrico en la Sección 2 de [4] se demuestran las proposiciones siguientes:

Proposición 5.4.10. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ y (A, u_A, m_A) un álgebra en ${}_H^H\mathcal{YD}$ con acción φ_A y coacción ϱ_A. Si $t_{A,A}$ es el operador Yang-Baxter débil definido en (5.43) entonces:*

(i) La terna $(A, \eta_A = u_A \circ p_L \circ \eta_H, \mu_A = m_A \circ p_{A\otimes A})$ es un álgebra en $\mathcal{C}$.

(ii) El par (A, φ_A) es un H-módulo álgebra por la izquierda.

(iii) El par (A, ϱ_A) es un H-comódulo álgebra por la izquierda.

Proposición 5.4.11. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ y (C, e_C, Δ_C) una coálgebra en ${}_H^H\mathcal{YD}$ con acción φ_C y coacción ϱ_C. Si $t_{C,C}$ es el operador Yang-Baxter débil definido en (5.43) entonces:*

(i) La terna $(C, \varepsilon_C = \varepsilon_H \circ i_L \circ e_C, \delta_C = i_{C\otimes C} \circ \Delta_C)$ es una coálgebra en $\mathcal{C}$.

(ii) El par (C, φ_C) es un H-módulo coálgebra por la izquierda.

(iii) El par (C, ϱ_C)es un H-comódulo coálgebra por la izquierda.

La noción de álgebra de Hopf débil (ver (1) de Ejemplos 1.2.10) puede establecerse también en una categoría trenzada no estricta. En la categoría ${}_H^H\mathcal{YD}$ la definición es la siguiente:

Definición 5.4.12. Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ y $(D, u_D, m_D, e_D, \Delta_D)$ un álgebra-coálgebra en ${}_H^H\mathcal{Y}D$. Se dice que D es un AHD en la categoría ${}_H^H\mathcal{Y}D$ si se cumplen las condiciones siguientes:

(f1) $\Delta_D \circ m_D$

$$= (m_D \times m_D) \circ \mathfrak{a}_{D,D,D\times D} \circ (D \times \mathfrak{a}^{-1}_{D,D,D}) \circ (D \times (\tau_{D,D} \times D))$$
$$\circ (D \times \mathfrak{a}_{D,D,D}) \circ \mathfrak{a}^{-1}_{D,D,D\times D} \circ (\Delta_D \times \Delta_D).$$

(f2) $e_D \circ m_D \circ (m_D \times D)$

$$= \mathfrak{l}_{H_L} \circ (e_D \times e_D) \circ (m_D \times m_D) \circ \mathfrak{a}^{-1}_{D\times D,D,D} \circ (\mathfrak{a}_{D,D,D} \times D) \circ ((D \times \Delta_D) \times D)$$
$$= \mathfrak{l}_{H_L} \circ (e_D \times e_D) \circ (m_D \times m_D) \circ \mathfrak{a}^{-1}_{D\times D,D,D} \circ (\mathfrak{a}_{D,D,D} \times D)$$
$$\circ ((D \times (\tau'_{D,D} \circ \Delta_D)) \times D).$$

(f3) $(\Delta_D \times D) \circ \Delta_D \circ u_D$

$$= ((D \times m_D) \times D) \circ (\mathfrak{a}^{-1}_{D,D,D} \times D) \circ \mathfrak{a}_{D\times D,D,D} \circ (\Delta_D \times \Delta_D) \circ (u_D \times u_D) \circ \mathfrak{l}^{-1}_{H_L}$$
$$= ((D \times (m_D \circ \tau'_{D,D})) \times D) \circ (\mathfrak{a}^{-1}_{D,D,D} \times D) \circ \mathfrak{a}_{D\times D,D,D} \circ (\Delta_D \times \Delta_D)$$
$$\circ (u_D \times u_D) \circ \mathfrak{l}^{-1}_{H_L}.$$

(f4) Existe un morfismo $\lambda_D : D \to D$ en ${}_H^H\mathcal{Y}D$ (llamado antípodo de D) satisfaciendo:

(f4-1) $m_D \circ (D \times \lambda_D) \circ \Delta_D$
$$= \mathfrak{l}_D \circ ((e_D \circ m_D) \times D) \circ \mathfrak{a}_{D,D,D} \circ (D \times \tau_{D,D}) \circ \mathfrak{a}^{-1}_{D,D,D}$$
$$\circ ((\Delta_D \circ u_D) \times D) \circ \mathfrak{l}^{-1}_D,$$

(f4-2) $m_D \circ (\lambda_D \times D) \circ \Delta_D$
$$= \mathfrak{r}_D \circ (D \times (e_D \circ m_D)) \circ \mathfrak{a}^{-1}_{D,D,D} \circ (\tau_{D,D} \times D) \circ \mathfrak{a}_{D,D,D}$$
$$\circ (D \times (\Delta_D \circ u_D)) \circ \mathfrak{r}^{-1}_D,$$

(f4-3) $\lambda_D = m_D \circ (m_D \times D) \circ ((\lambda_D \times D) \times \lambda_D) \circ (\Delta_D \times D) \circ \Delta_D.$

Un morfismo de AHD en ${}_H^H\mathcal{Y}D$ es un morfismo de álgebras y coálgebras en ${}_H^H\mathcal{YD}$.

De modo análogo al contexto simétrico (véase () de Ejemplos 1.2.6) se establece la noción de álgebra de Hopf en la categoría monoidal trenzada no estricta ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Definición 5.4.13. Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ y $(D, u_D, m_D, e_D, \Delta_D)$ un álgebra-coálgebra en ${}_H^H\mathcal{Y}D$. Se dice que D es un álgebra de Hopf en la categoría ${}_H^H\mathcal{Y}D$ si se cumplen las condiciones siguientes:

(g1) $$\Delta_D \circ m_D$$
$$= (m_D \times m_D) \circ \mathfrak{a}_{D,D,D\times D} \circ (D \times \mathfrak{a}^{-1}_{D,D,D}) \circ (D \times (\tau_{D,D} \times D))$$
$$\circ (D \times \mathfrak{a}_{D,D,D}) \circ \mathfrak{a}^{-1}_{D,D,D\times D} \circ (\Delta_D \times \Delta_D).$$

(g2) $e_D \circ m_D = \mathfrak{l}_{H_L} \circ (e_D \times e_D)$.

(g3) $\Delta_D \circ u_D = (u_D \times u_D) \circ \mathfrak{l}^{-1}_{H_L}$.

(g4) Existe un morfismo $\lambda_D : D \to D$ en ${}_H^H\mathcal{Y}D$ (llamado antípodo de D) satisfaciendo:
$$m_D \circ (D \times \lambda_D) \circ \Delta_D = m_D \circ (\lambda_D \times D) \circ \Delta_D = \mathfrak{l}_D \circ (u_D \times e_D) \circ \mathfrak{l}^{-1}_D.$$

Un morfismo de álgebras de Hopf en ${}_H^H\mathcal{Y}D$ es un morfismo de álgebras y coálgebras en ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Argumentando como en el Corolario 2.14 de [4] resulta:

Teorema 5.4.14. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ y $(D, u_D, m_D, e_D, \Delta_D, \lambda_D)$ un AHD en ${}_H^H\mathcal{YD}$. Tomando los morfismos definidos en las Proposiciones 5.4.10 y 5.4.11, $(D, \eta_D, \mu_D, \varepsilon_D, \delta_D, \lambda_D)$ es un AHTD en $\mathcal{C}$ con operador Yang-Baxter débil asociado el definido en (5.43).*

5.4.15. Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ y $(D, u_D, m_D, e_D, \Delta_D, \lambda_D)$ un AHD en ${}_H^H\mathcal{YD}$. Considerando los morfismos introducidos en las Proposiciones 5.4.10 y 5.4.11 y con la notación del párrafo 5.4.2 se definen los siguientes morfismos:

$$\eta_{D\times H} = p_{D\otimes H} \circ (\eta_D \otimes \eta_H) : K \to D \times H,$$

$$\mu_{D\times H} = p_{D\otimes H} \circ (\mu_D \otimes \mu_H) \circ (D \otimes ((\varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D}) \circ (\delta_H \otimes D)) \otimes H)$$

$$\circ (i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H}) : (D \times H) \otimes (D \times H) \to D \times H,$$

$$\varepsilon_{D\times H} = (\varepsilon_D \otimes \varepsilon_H) \circ i_{D\otimes H} : D \times H \to K,$$

$$\delta_{D\times H} = (p_{D\otimes H} \otimes p_{D\otimes H}) \circ (D \otimes ((\mu_H \otimes D) \circ (H \otimes c_{D,H})$$

$$\circ (\varrho_D \otimes H)) \otimes H) \circ (\delta_D \otimes \delta_H) \circ i_{D\otimes H} : D \times H \to (D \times H) \otimes (D \times H),$$

$$\lambda_{D\times H} = p_{D\otimes H} \circ (\varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D}) \circ ((\delta_H \circ \lambda_H \circ \mu_H) \otimes \lambda_D) \circ (H \otimes c_{D,H})$$

$$\circ (\varrho_D \otimes H) \circ i_{D\otimes H} : D \times H \to D \times H.$$

Teorema 5.4.16. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ y $(D, u_D, m_D, e_D, \Delta_D, \lambda_D)$ un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$. Tomando los morfismos definidos en 5.4.15 se cumple que $(D \times H, \eta_{D\times H}, \mu_{D\times H}, \varepsilon_{D\times H}, \delta_{D\times H}, \lambda_{D\times H})$ es un AHD en $\mathcal{C}$, a la que se se denominará biproducto smash débil de D and H.*

Prueba:
El Teorema 5.4.14 establece que $(D, \eta_D, \mu_D, \varepsilon_D, \delta_D, \lambda_D)$ es un AHTD en $\mathcal{C}$, y las Proposiciones 5.4.10 y 5.4.11 que (D, φ_D) es un H-(co)módulo álgebra por la izquierda y (D, ϱ_D) un H-(co)módulo coálgebra por la izquierda; a lo largo de la demostración se usarán las propiedades propias de esas estructuras.

En primer lugar probaremos que $D \times H$ es un álgebra. En efecto, para la unidad tenemos que:

$$\mu_{D\times H} \circ (D \times H \otimes \eta_{D\times H})$$

$$= p_{D\otimes H} \circ (\mu_D \otimes H) \circ (D \otimes \varphi_D \otimes \mu_H) \circ (D \otimes H \otimes c_{H,D} \otimes H)$$

$$\circ (D \otimes \delta_H \otimes \nabla_{D\otimes H}) \circ (i_{D\otimes H} \otimes \eta_D \otimes \eta_H)$$

$$= p_{D\otimes H} \circ (\mu_D \otimes H) \circ (D \otimes \varphi_D \otimes \mu_H) \circ (D \otimes H \otimes c_{H,D} \otimes H)$$

$$\circ (D \otimes \delta_H \otimes ((\varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D}) \circ (\delta_H \otimes D))) \circ (i_{D\otimes H} \otimes \eta_H \otimes \eta_D)$$

$$
\begin{aligned}
&= p_{D\otimes H}\circ(\mu_D\otimes H)\circ(D\otimes\varphi_D\otimes H)\circ(D\otimes H\otimes c_{H,D})\\
&\quad\circ(D\otimes(\delta_H\circ\mu_H)\otimes D)\circ(i_{D\otimes H}\otimes\eta_H\otimes\eta_D)\\
&= p_{D\otimes H}\circ(\mu_D\otimes H)\circ(D\otimes(\varphi_D\circ c_{H,D}^{-1}\circ(\eta_D\otimes\overline{\Pi}_H^L))\otimes H)\circ(D\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}\\
&= p_{D\otimes H}\circ(\mu_D\otimes H)\circ(D\otimes\nabla_{D\otimes H})\circ(D\otimes\eta_D\otimes H)\circ i_{D\otimes H}\\
&= p_{D\otimes H}\circ\nabla_{D\otimes H}\circ((\mu_D\circ(D\otimes\eta_D))\otimes H)\circ i_{D\otimes H}\\
&= id_{D\times H},
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue por las definiciones de $\mu_{D\times H}$ y $\eta_{D\times H}$, la segunda es cierta porque en virtud de la propiedad de la unidad para H se tiene

$$\nabla_{D\otimes H}\circ(\eta_D\otimes\eta_H)=(\varphi_D\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,D})\circ((\delta_H\circ\eta_H)\otimes\eta_D). \tag{5.69}$$

La tercera igualdad se deduce de la naturalidad de la trenza, la condición de H-módulo de D y (c1) de (1) de Ejemplos 1.2.10 para H, la cuarta se deduce de las propiedades de η_H, (5.62), y de la igualdad:

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_D\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,D})\circ(\delta_H\otimes\eta_D)\\
&= ((\varphi_D\circ c_{H,D}^{-1}\circ c_{H,D})\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,D})\circ(\delta_H\otimes\eta_D)\\
&= ((\varphi_D\circ c_{H,D}^{-1})\otimes H)\circ(\eta_D\otimes\delta_H).
\end{aligned}
$$

La quinta igualdad es un caso particular de (5.45), en la séptima se usan las propiedades de η_D y las de la escisión, mientras que la sexta es consecuencia de la fórmula

$$(\mu_D\otimes H)\circ(D\otimes\nabla_{D\otimes H})=\nabla_{D\otimes H}\circ(\mu_D\otimes H), \tag{5.70}$$

que a su vez se cumple pues:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{D\otimes H}\circ(\mu_D\otimes H)\\
&= (\varphi_D\otimes\mu_H)\circ(H\otimes c_{H,D}\otimes H)\circ((\delta_H\circ\eta_H)\otimes\mu_D\otimes H)\\
&= (\varphi_D\otimes H)\circ(H\otimes((\mu_D\otimes\mu_H)\circ(D\otimes c_{H,D}\otimes H)\circ(c_{H,D}\otimes D\otimes H)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\circ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes D \otimes D \otimes H)\\
&= (\mu_D \otimes H) \circ (\varphi_D \otimes \varphi_D \otimes \mu_H) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes c_{H,D} \otimes H)\\
&\circ(\delta_H \otimes c_{H,D} \otimes D \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes D \otimes D \otimes H)\\
&= (\mu_D \otimes H) \circ (\varphi_D \otimes \varphi_D \otimes \mu_H) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes c_{H,D} \otimes H)\\
&\circ(H \otimes \mu_H \otimes c_{H,D} \otimes D \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes (\delta_H \circ \eta_H) \otimes D \otimes D \otimes H)\\
&= (\mu_D \otimes H) \circ (\varphi_D \otimes \varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes \varphi_D \otimes \mu_H)\\
&\circ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes c_{H,D} \otimes c_{H,D} \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes D \otimes H)\\
&\circ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes D \otimes D \otimes H)\\
&= (\mu_D \otimes H) \circ (\varphi_D \otimes \varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes D \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes D \otimes \nabla_{D\otimes H})\\
&= ((\varphi_D \circ (\eta_H \otimes D)) \otimes H) \circ (\mu_D \otimes H) \circ (D \otimes \nabla_{D\otimes H})\\
&= (\mu_D \otimes H) \circ (D \otimes \nabla_{D\otimes H}),
\end{aligned}
$$

donde en la primera igualdad se usa la definición de $\nabla_{D\otimes H}$, la segunda se sigue por la naturalidad de la trenza, la tercera y la séptima por (5.61), la cuarta por (c3) de (1) de Ejemplos 1.2.10 para H; la quinta se deduce de la naturalidad de la trenza y la condición de H-módulo de D. La sexta igualdad es consecuencia de la naturalidad de la trenza y la definición de $\nabla_{D\otimes H}$ y la octava se tiene por ser D un H-módulo.

Por el otro lado:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{D\times H} \circ (\eta_{D\times H} \otimes D \times H)\\
&= p_{D\otimes H} \circ (\mu_D \otimes H) \circ (D \otimes \varphi_D \otimes \mu_H) \circ (D \otimes H \otimes c_{H,D} \otimes H)\\
&\circ(\varphi_D \otimes \delta_H \otimes D \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes D \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes \eta_D \otimes i_{D\otimes H})\\
&= p_{D\otimes H} \circ (\mu_D \otimes H) \circ (((\varphi_D \otimes \varphi_D) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes D)\\
&\circ(\delta_H \otimes D \otimes D)) \otimes \mu_H) \circ (H \otimes D \otimes c_{H,D} \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes D \otimes H)
\end{aligned}
$$

$$\circ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes \eta_D \otimes i_{D\otimes H})$$

$$= p_{D\otimes H} \circ (\varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes \mu_D \otimes \mu_H) \circ (H \otimes D \otimes c_{H,D} \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes D \otimes H)$$

$$\circ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes \eta_D \otimes i_{D\otimes H})$$

$$= p_{D\otimes H} \circ (\varphi_D \otimes \mu_H) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes i_{D\otimes H})$$

$$= id_{D\times H},$$

donde la primera igualdad se obtiene a partir de (5.69) y de las definiciones de $\mu_{D\times H}$ y $\eta_{D\times H}$, la segunda por naturalidad de la trenza, la tercera por (5.61), la cuarta gracias a la naturalidad de la trenza y las propiedades de η_D, la quinta por la definición de $\nabla_{D\otimes H}$ y las propiedades de la escisión.

En cuanto a la asociatividad, teniendo en cuenta (5.70) y (5.34), la demostración es similar a la del caso simétrico.

Utilizando las mismas técnicas pero intercambiando los papeles entre las propiedades relativas a la estructuras de álgebra y coálgebra se demuestra que $(D \times H, \varepsilon_{D\times H}, \delta_{D\times H})$ es una coálgebra en $\mathcal{C}$.

Se prueban ahora los restantes axiomas de la definición de AHD. En primer lugar, y al igual que ocurría con la asociatividad del producto, la demostración de (c1) de (1) de Ejemplos 1.2.10 es similar a la del caso simétrico si se tiene en cuenta además (5.34), (5.63), (5.65) y (5.70); por lo que los cálculos serán omitidos.

Para demostrar la condición (c2) de (1) de Ejemplos 1.2.10 nótese primero que:

$$\varepsilon_{D\times H} \circ \mu_{D\times H} = \varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D \otimes \varepsilon_H) \circ (i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H}). \tag{5.71}$$

En efecto:

$$\varepsilon_{D\times H} \circ \mu_{D\times H}$$

$$= \varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H))) \circ (D \otimes H \otimes c_{H,D} \otimes H)$$

$$\circ(D \otimes \delta_H \otimes D \otimes H) \circ (i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H})$$

$$= \varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes D) \circ (D \otimes \delta_H \otimes c_{D,H}^{-1})$$

$$\circ(i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H})$$

$$= \varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes (\varphi_D \circ (\mu_H \otimes D))) \circ (D \otimes H \otimes \overline{\Pi}_H^L \otimes D)$$

$$\circ(D \otimes H \otimes c_{D,H}^{-1}) \circ (i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H})$$

$$= \varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes H \otimes (\varphi_D \circ (\overline{\Pi}_H^L \otimes D) \circ (c_{D,H}^{-1} \otimes \varepsilon_H)$$

$$\circ(D \otimes \delta_H))) \circ (i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H})$$

$$= \varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D \otimes \varepsilon_H) \circ (i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H}),$$

donde la primera igualdad es cierta por (5.70) y (5.34), la segunda por (1.25), la tercera se obtiene gracias a (1.41), la cuarta se deduce por las propiedades de ε_H y la de H-módulo para D, y la quinta por la caracterización (5.45) para $\nabla_{D\otimes H}$ y las propiedades de la escisión.

Entonces:

$$\varepsilon_{D\times H} \circ \mu_{D\times H} \circ (D \times H \otimes \mu_{D\times H})$$

$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D)) \otimes \varepsilon_H) \circ (D \otimes H \otimes (\nabla_{D\otimes H} \circ (\mu_D \otimes H)))$$

$$\circ(D \otimes H \otimes D \otimes ((\varphi_D \otimes \mu_H) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes D \otimes H)))$$

$$\circ(i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H})$$

$$= ((\varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D)) \otimes \varepsilon_H) \circ (D \otimes H \otimes \mu_D \otimes H)$$

$$\circ(D \otimes H \otimes D \otimes ((\varphi_D \otimes \mu_H) \circ (H \otimes c_{H,D} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes D \otimes H)))$$

$$\circ(i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H})$$

$$= \varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes H \otimes (\mu_D \circ (D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes D)))$$

$$\circ(D \otimes H \otimes D \otimes \delta_H \otimes c_{D,H}^{-1}) \circ (i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H})$$

$$= \varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes H \otimes (\mu_D \circ (D \otimes \varphi_D)))$$

$$\circ((i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H} \otimes ((\varphi_D \circ (\overline{\Pi}_H^L \otimes D) \circ c_{D,H}^{-1} \circ (D \otimes ((H \otimes \varepsilon_H) \circ \delta_H))) \circ i_{D\otimes H}))$$

$$= \varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes H \otimes \mu_D) \circ (D \otimes H \otimes D \otimes \varphi_D \otimes \varepsilon_H)$$

$$\circ(i_{D\otimes H}\otimes i_{D\otimes H}\otimes i_{D\otimes H}).$$

En estos cálculos, la primera igualdad se obtiene por (5.71) y la definición de $\mu_{D\times H}$; en las restantes se siguen los mismos argumentos que en la prueba de (5.71).

Por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned}
&((\varepsilon_{D\times H}\circ\mu_{D\times H})\otimes(\varepsilon_{D\times H}\circ\mu_{D\times H}))\circ(D\times H\otimes\delta_{D\times H}\otimes D\times H)\\
&=(\varepsilon_D\otimes(\varepsilon_H\circ\mu_H)\circ(\varepsilon_D\circ\mu_D))\circ(\mu_D\otimes H\otimes c_{D,H}\otimes\varphi_D)\\
&\circ(D\otimes\varphi_D\otimes\varrho_D\otimes H\otimes H\otimes D)\circ(D\otimes H\otimes\delta_D\otimes\delta_H\otimes D\otimes\varepsilon_H)\\
&\circ(i_{D\otimes H}\otimes i_{D\otimes H}\circ i_{D\otimes H})\\
&=((\varepsilon_D\circ\mu_D)\otimes(\varepsilon_D\circ\mu_D))\circ(D\otimes\varphi_D\otimes\nabla_{D,D})\\
&\circ(D\otimes H\otimes\delta_D\otimes\varphi_D\otimes\varepsilon_H)\circ(i_{D\otimes H}\otimes i_{D\otimes H}\circ i_{D\otimes H})\\
&=\varepsilon_D\circ\mu_D\circ(D\otimes\varphi_D)\circ(D\otimes H\otimes\mu_D)\circ(D\otimes H\otimes D\otimes(\overline{\Pi}_D^L\circ\varphi_D\otimes\varepsilon_H)\\
&\circ(i_{D\otimes H}\otimes i_{D\otimes H}\circ i_{D\otimes H})\\
&=\varepsilon_D\circ\mu_D\circ(\mu_D\otimes D)\circ(D\otimes\varphi_D\otimes\varphi_D)\circ(D\otimes H\otimes c_{H,D}\otimes D)\\
&\circ(D\otimes\delta_H\otimes D\otimes(\overline{\Pi}_D^L\circ\varphi_D)\otimes\varepsilon_H)\circ(i_{D\otimes H}\otimes i_{D\otimes H}\circ i_{D\otimes H})\\
&=\varepsilon_D\circ\mu_D\circ(\mu_D\otimes\overline{\Pi}_D^L)\circ(D\otimes\varphi_D\otimes\varphi_D)\circ(D\otimes H\otimes c_{H,D}\otimes D)\\
&\circ(D\otimes\delta_H\otimes D\otimes\varphi_D\otimes\varepsilon_H)\circ(i_{D\otimes H}\otimes i_{D\otimes H}\circ i_{D\otimes H})\\
&=\varepsilon_D\circ\mu_D\circ(D\otimes\varphi_D)\circ(D\otimes H\otimes\mu_D)\circ(D\otimes H\otimes D\otimes\varphi_D\otimes\varepsilon_H)\\
&\circ(i_{D\otimes H}\otimes i_{D\otimes H}\circ i_{D\otimes H}),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se deduce por (5.35), (b2-1) de la Definición 1.2.9 para D y las igualdades

$$(\nabla_{D\otimes H}\otimes D)\circ(D\otimes\varrho_D)=(D\otimes\varrho_D)\circ\nabla_{D\otimes D}\tag{5.72}$$

y

$$(D\otimes\mu_H)\circ(\nabla_{D\otimes H}\otimes H)=\nabla_{D\otimes D}\circ(D\otimes\mu_H),\tag{5.73}$$

que se obtienen usando la condición de H-comódulo de D y la coasociatividad de δ_H respectivamente.

La segunda igualdad se obtiene ya que por la condición de H-módulo de D se cumple

$$(D \otimes \varphi_D) \circ (\nabla_{D\otimes H} \otimes D) = \nabla_{D\otimes D} \circ (D \otimes \varphi_D). \tag{5.74}$$

En la tercera hacemos uso de (b1-1) de la Definición 1.2.9 y (1.41) para D, la cuarta se sigue por (5.61) y la asociatividad de μ_D. La quinta igualdad es consecuencia de

$$\varphi_D \circ (H \otimes \overline{\Pi}_D^L) = \overline{\Pi}_D^L \circ \varphi_D, \tag{5.75}$$

siendo esta última fórmula cierta a su vez porque por hipótesis el objeto $(D, u_D, m_D, e_D, \Delta_D, \lambda_D)$ es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$, y esto implica que

$$\overline{\Pi}_D^L = u_D \circ e_D, \tag{5.76}$$

siendo u_D y e_D morfismos de H-módulos.

Finalmente, la última igualdad se deduce de (1.31), (1.49), la asociatividad de μ_D y (5.61).

Considerando el morfismo $\Pi_D^L = u_D \circ e_D$ se tiene también:

$$\begin{aligned}
&((\varepsilon_{D\times H} \circ \mu_{D\times H}) \otimes (\varepsilon_{D\times H} \circ \mu_{D\times H}))\\
&\circ(D \times H \otimes (c^{-1}_{D\times H, D\times H} \circ \delta_{D\times H}) \otimes D \times H)\\
= {}&\varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D) \circ (D \otimes H \otimes \mu_D) \circ (D \otimes H \otimes D \otimes \varphi_D \otimes \varepsilon_H)\\
&\circ(i_{D\otimes H} \otimes i_{D\otimes H} \circ i_{D\otimes H}),
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado (c2) de (1) de Ejemplos 1.2.10.

El axioma (c3) de (1) de Ejemplos 1.2.10 se demuestra siguiendo la misma estrategia y usando las mismas técnicas, pero intercambiando entre sí los papeles de las propiedades de álgebra y coálgebra, usando la fórmula

$$\delta_{D\times H} \circ \eta_{D\times H} = (p_{D\otimes H} \otimes (p_{D\otimes H} \circ (D \otimes \eta_H))) \circ (D \otimes \varrho_D) \circ \delta_D \circ \eta_D \tag{5.77}$$

en vez de (5.71), y manejando el morfismo de comódulos $\overline{\Pi}_D^R = u_D \circ e_D$ en vez de $\overline{\Pi}_D^L$ y Π_D^R en vez de Π_D^L.

Se procede ahora a comprobar las condiciones para el antípodo. Nótese en primer lugar que:

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D}) \circ ((\delta_H \circ \Pi_H^L \circ \mu_H) \otimes \lambda_D) \circ (H \otimes c_{D,H}) \circ (\varrho_D \otimes H) \\
&= \nabla_{D\otimes H} \circ (D \otimes \eta_H) \circ (\lambda_D \otimes \varepsilon_H) \circ \nabla_{D\otimes H}.
\end{aligned}
\tag{5.78}
$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D}) \circ ((\delta_H \circ \Pi_H^L \circ \mu_H) \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes c_{D,H}) \circ (\varrho_D \otimes H) \\
&= (\varphi_D \otimes H) \circ ((\mu_H \circ c_{H,H}^{-1}) \otimes c_{H,D}) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H) \otimes \lambda_D) \\
&\quad \circ (\Pi_H^L \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes D) \circ ((c_{H,H}^{-1} \circ \delta_H) \otimes c_{D,H}) \circ (\varrho_D \otimes H) \\
&= (\varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes \varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes c_{H,D}) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes D) \\
&\quad \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H \otimes D) \circ ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes \Pi_H^L \otimes D) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes \lambda_D) \\
&\quad \circ (H \otimes H \otimes c_{D,H}) \circ (H \otimes \varrho_D \otimes H) \circ (\varrho_D \otimes H) \\
&= (\varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes D) \circ ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes (\varphi_D \circ (\Pi_H^L \otimes D) \circ \varrho_D)) \\
&\quad \circ (H \otimes c_{D,H}) \circ (H \otimes \lambda_D \otimes H) \circ (\varrho_D \otimes H) \\
&= (\varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes D) \circ ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes D) \\
&\quad \circ (H \otimes c_{D,H}) \circ (H \otimes \lambda_D \otimes H) \circ (\varrho_D \otimes H) \\
&= \nabla_{D\otimes H} \circ (\lambda_D \otimes (\eta_H \circ \varepsilon_H)) \circ \nabla_{D\otimes H}),
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue de los apartados (i) y (ii) del Lema 1.2.14, la segunda es consecuencia de (1.26), (1.27) y la condición de H-(co)módulo de D, la tercera de la naturalidad de la trenza y ser λ_D y morfismo de H-(co)módulos. La cuarta igualdad es cierta por ser D un objeto en ${}_H^H\mathcal{YD}$ y la última porque usando las propiedades de la (co)unidad de H resulta:

$$
((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes D) \circ (H \otimes c_{D,H}) \circ (\varrho_D \otimes H) = (D \otimes \varepsilon_H) \circ \nabla_{D\otimes H} \tag{5.79}
$$

y

$$
(\varphi_D \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,D}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes D) = \nabla_{D\otimes H} \circ (D \otimes \eta_H). \tag{5.80}
$$

Se dispone en este momento de todas las herramientas necesarias para comprobar (c4-1) de (1) de Ejemplos 1.2.10. Por una parte se cumple que

$$id_{D\times H} \wedge \lambda_{D\times H} = p_{D\times H} \circ ((id_D \wedge \lambda_D) \otimes (\eta_H \otimes \varepsilon_H)) \circ i_{D\times H}, \tag{5.81}$$

pues

$$\begin{aligned}
&\mu_{D\times H} \circ (D \times H \otimes \lambda_{D\times H}) \circ \delta_{D\times H}\\
&= p_{D\otimes H} \circ ((\mu_D \circ (D \otimes \varphi_D)) \otimes \mu_H) \circ (D \otimes H \otimes c_{H,D} \otimes H)\\
&\quad \circ (D\otimes H\otimes H\otimes((\varphi_D\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,D})))\circ(D\otimes H\otimes H\otimes(\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes\lambda_D)\\
&\quad \circ (D \otimes \delta_H \otimes H \otimes c_{D,H}) \circ (D \otimes \mu_H \otimes \varrho_D \otimes H) \circ (D \otimes H \otimes c_{D,H} \otimes H)\\
&\quad \circ (D \otimes \varrho_D \otimes \delta_H) \circ (\delta_D \otimes H) \circ i_{D\otimes H}\\
&= p_{D\otimes H}\circ((\mu_D\circ(D\otimes\varphi_D))\otimes H)\circ(D\otimes H\otimes c_{H,D})\circ(D\otimes(\delta_H\circ\Pi_H^L\circ\mu_H)\otimes\lambda_D)\\
&\quad \circ (D \otimes H \otimes c_{D,H}) \circ (D \otimes \varrho_D \otimes H) \circ (\delta_D \otimes H) \circ i_{D\otimes H}\\
&= p_{D\otimes H} \circ (\mu_D \otimes H) \circ (D \otimes (\nabla_{D\otimes H} \circ (D \otimes \eta_H))) \circ (D \otimes ((\lambda_D \otimes \varepsilon_H)\\
&\quad \circ \nabla_{D\otimes H})) \circ (\delta_D \otimes H) \circ i_{D\otimes H}\\
&= p_{D\otimes H} \circ (\Pi_D^L \otimes \eta_H \otimes \varepsilon_H) \circ i_{D\otimes H}\\
&= p_{D\times H} \circ ((id_D \wedge \lambda_D) \otimes (\eta_H \otimes \varepsilon_H)) \circ i_{D\times H},
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se tiene por las definiciones de $\mu_{D\otimes H}$, $\delta_{D\otimes H}$ y $\lambda_{D\otimes H}$, junto con (5.34), (5.35), (5.72), (5.73), la asociatividad de μ_H y μ_D y la condición (b2-1) de la Definición 1.2.9 para D. En la segunda igualdad se aplica la naturalidad de la trenza, la condición de H-(co)módulo de D, (c1) de (1) de Ejemplos 1.2.10 para H y (1.29), la tercera es consecuencia de (5.78), la cuarta se sigue de (1.29), (5.70) y su versión para la estructura de coálgebra:

$$(D \otimes \nabla_{D\otimes H}) \circ (\delta_D \otimes H) = (\delta_D \otimes H) \circ \nabla_{D\otimes H}. \tag{5.82}$$

Finalmente, la quinta igualdad se obtiene por (1.29).

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
&((\varepsilon_{D\times H} \circ \mu_{D\times H}) \otimes D \times H) \circ (D \times H \otimes c_{D\times H, D\times H}) \\
&\circ((\delta_{D\times H} \circ \eta_{D\times H}) \otimes D \times H) \\
&= ((\varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D)) \otimes D \times H) \\
&\circ(\nabla_{D\otimes H} \otimes ((D \otimes \varepsilon_H) \circ i_{D\otimes H}) \otimes D \times H) \circ (D \otimes H \otimes c_{D\times H, D\times H}) \\
&\circ(D \otimes H \otimes (p_{D\otimes H} \circ (D \otimes \eta_H)) \otimes D \times H) \circ (((D \otimes \varrho_D) \circ \delta_D \circ \eta_D) \otimes D \times H) \\
&= ((\varepsilon_D \circ \mu_D \circ (D \otimes \varphi_D)) \otimes (p_{D\otimes H} \circ (D \otimes \eta_H))) \circ (D \otimes H \otimes c_{D,D}) \\
&\circ(D \otimes \varrho_D \otimes D \otimes \varepsilon_H) \circ ((\delta_D \circ \eta_D) \otimes i_{D\otimes H}) \\
&= p_{D\otimes H} \circ (\Pi_D^L \otimes \eta_H \otimes \varepsilon_H) \circ i_{D\otimes H},
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se tiene por (5.71) y (5.77), la segunda por naturalidad de la trenza, (5.72) y (b2-1) de la Definición 1.2.9 para D, la última por la Proposición 5.4.7, el Teorema 5.4.14 y la definición de Π_D^L.

La prueba de (c4-2) de (1) de Ejemplos 1.2.10 es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&(D \times H \otimes (\varepsilon_{D\times H} \circ \mu_{D\times H})) \circ (c_{D\times H, D\times H} \otimes D \times H) \\
&\circ(D \times H \otimes (\delta_{D\times H} \circ \eta_{D\times H})) \\
&= (D \times H \otimes ((\varepsilon_D \circ \mu_D) \circ ((D \otimes \varphi_D) \circ (i_{D\otimes H} \otimes D)))) \circ (c_{D\times H, D\times H} \otimes D) \\
&\circ(D \times H \otimes ((p_{D\otimes H} \otimes D) \circ (D \otimes \varrho_D) \circ \delta_D \circ \eta_D)) \\
&= (D\times H\otimes(\varepsilon_H\circ\mu_H))\circ(D\times H\otimes((i_L\circ e_D)\otimes(i_L\circ e_D)))\circ(D\times H\otimes((D\otimes\varphi_D) \\
&\circ(i_{D\otimes H} \otimes D))) \circ (c_{D\times H, D\times H} \otimes D) \circ (D \times H \otimes ((p_{D\otimes H} \otimes D) \circ (D \otimes \varrho_D))) \\
&\circ(D \times H \otimes ((u_D \circ p_L) \otimes (u_D \circ p_L))) \circ (D \times H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)) \\
&= (D\times H\otimes((\varepsilon_H \circ \mu_H) \circ ((i_L \circ e_D) \otimes (i_L \circ p_L \circ \mu_H)))) \circ (D \times H \otimes i_{D\otimes H} \otimes H) \\
&\circ(c_{D\times H, D\times H} \otimes (i_L \circ e_D \circ u_D \circ p_L)) \circ (D \times H \otimes ((p_{D\otimes H} \otimes H))) \\
&\circ(D \times H \otimes ((u_D \circ p_L) \otimes (\delta_H \circ i_L \circ p_L))) \circ (D \times H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)) \\
&= (p_{D\otimes H} \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ ((u_D \circ p_L) \otimes H \otimes (i_L \circ e_D) \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes i_{D\otimes H} \otimes H)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\circ(c_{D\times H,H}\otimes H)\circ(D\times H\otimes(\delta_H\circ\eta_H))\\
&=(p_{D\otimes H}\circ((u_D\circ p_L)\otimes H)\circ\delta_H)\otimes(\varepsilon_H\circ\mu_H))\\
&\circ(c_{H,H}\otimes H)\circ((\mu_H\circ((i_L\circ e_D)\otimes H))\otimes H\otimes H)\circ(i_{D\otimes H}\otimes(\delta_H\circ\eta_H))\\
&=p_{D\otimes H}\circ((u_D\circ p_L)\otimes H)\circ\delta_H\circ\Pi_H^R\\
&\circ(\mu_H\circ((i_L\circ e_D)\otimes H))\circ i_{D\otimes H}\\
&=p_{D\otimes H}\circ((u_D\circ p_L)\otimes H)\circ(H\otimes\mu_H)\circ((\delta_H\circ\eta_H)\otimes H)\circ\Pi_H^R\\
&\circ(\mu_H\circ((i_L\circ e_D)\otimes H))\circ i_{D\otimes H}\\
&=p_{D\otimes H}\circ(D\otimes(\mu_H\circ(H\otimes\mu_H)))\circ(D\otimes H\otimes(\mu_H\circ c_{H,H})\otimes H)\\
&\circ((u_D\circ p_L)\otimes H\otimes\Pi_H^R\otimes\lambda_H\otimes H)\circ((\delta_H\circ\eta_H)\otimes((i_L\circ e_D)\otimes\delta_H))\circ i_{D\otimes H}\\
&=p_{D\otimes H}\circ(D\otimes(\mu_H\circ(\mu_H\otimes H)))\circ((u_D\circ p_L)\otimes H\otimes(\lambda_H\circ\mu_H)\otimes H)\\
&\circ((\delta_H\circ\eta_H)\otimes(i_L\circ e_D)\otimes\delta_H))\circ i_{D\otimes H}\\
&=p_{D\otimes H}\circ((u_D\circ p_L\circ\overline{\Pi}_H^L)\otimes\mu_H)\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes H)\circ((i_L\circ e_D)\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}\\
&=p_{D\otimes H}\circ((u_D\circ p_L)\otimes\mu_H)\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes H)\circ((i_L\circ e_D)\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}\\
&=p_{D\otimes H}\circ((u_D\circ p_L)\otimes\mu_H)\circ(c_{H,H}\otimes H)\circ((\lambda_H\circ\mu_H)\otimes\mu_H\otimes H)\\
&\circ(H\otimes((H\otimes c_{H,H})\circ(c_{H,H}\otimes H)\otimes H)\circ(H\otimes\lambda_H\otimes H\otimes\lambda_H\otimes H)\\
&\circ(\delta_H\otimes\delta_H\otimes H)\circ((i_L\circ e_D)\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}\\
&=p_{D\otimes H}\circ((u_D\circ p_L)\otimes\mu_H)\circ(c_{H,H}\otimes H)\circ((\lambda_H\circ\mu_H)\otimes\mu_H\otimes H)\\
&\circ(H\otimes((H\otimes c_{H,H})\circ(c_{H,H}\otimes H)\otimes H)\circ(H\otimes\Pi_H^R\otimes H\otimes\lambda_H\otimes H)\\
&\circ(\delta_H\otimes\delta_H\otimes H)\circ((i_L\circ e_D)\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}\\
&=p_{D\otimes H}\circ((u_D\circ p_L)\otimes H)\circ((\mu_H\otimes\mu_H)\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H))\\
&\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes H\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,H}\otimes H)\circ(\delta_H\otimes H\otimes H)\\
&\circ((i_L\circ e_D)\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= p_{D\otimes H}\circ((u_D\circ p_L)\otimes H)\circ((\mu_H\otimes\mu_H)\circ(H\otimes((i_L\otimes H)\circ c_{H,H_L})\otimes H))\\
&\quad\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes H_L\otimes H)\circ(H\otimes(c_{H_L,H}\circ(p_L\otimes H))\otimes H)\\
&\quad\circ((\delta_H\circ i_L\circ e_D)\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}\\
&= p_{D\otimes H}\circ((\varphi_D\circ(H\otimes u_D))\otimes\mu_H)\circ(H\otimes c_{H,H_L}\otimes H)\\
&\quad\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes H_L\otimes H))\circ(H\otimes(c_{H_L,H}\circ(e_D\otimes H))\otimes H)\\
&\quad\circ(\varrho_D\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}\\
&= p_{D\otimes H}\circ(\varphi_D\otimes\mu_H)\circ(H\otimes c_{H,D}\otimes H)\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes D\otimes H))\\
&\quad\circ(H\otimes(c_{D,H}\circ(\Pi_D^R\otimes H))\otimes H)\circ(\varrho_D\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}\\
&= \mu_{D\times H}\circ(\lambda_{D\times H}\otimes D\times H)\circ\delta_{D\times H}.
\end{aligned}
$$

En estos cálculos, la primera igualdad se sigue por las definiciones introducidas en 5.4.15, junto con (5.71), (5.77) y la identidad

$$(D\otimes\varepsilon_H)\circ\nabla_{D\otimes H}\circ(D\otimes\eta_H)=id_D.$$

La segunda es cierta porque las definiciones de η_D, δ_D, μ_D y ε_D introducidas en las Proposiciones 5.4.10 y 5.4.11, y las condiciones (g2) y (g3) implican que

$$\delta_D\circ\eta_D=(u_D\otimes u_D)\circ(p_L\otimes p_L)\circ\delta_H\circ\eta_H \tag{5.83}$$

y

$$\varepsilon_D\circ\mu_D=\varepsilon_D\circ\mu_D\circ(i_L\otimes i_L)\circ(e_D\otimes e_D). \tag{5.84}$$

La tercera igualdad se sigue por ser e_D y u_D morfismos de (co)módulos, la cuarta por la naturalidad de la trenza, (1.52), (1.47), (1.49) y porque $e_D\circ u_D=id_{H_L}$ ya que D es un álgebra de Hopf en ${}_H^H\mathcal{YD}$. La quinta igualdad es consecuencia de la naturalidad de la trenza, la sexta de la definición de Π_H^R, la séptima de la parte (iii) del Lema 1.2.14 y la octava de la identidad

$$\Pi_H^R\circ\mu_H=\mu_H\circ((\mu_H\circ c_{H,H}\circ(\Pi_H^R\otimes\lambda_H))\otimes H)\circ(H\otimes\delta_H). \tag{5.85}$$

La prueba de (5.85) es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\mu_H \circ ((\mu_H \circ t_{H,H} \circ (\Pi_H^R \otimes \lambda_H)) \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H) \\
&= \mu_H \circ (H \otimes (\mu_H \circ (\Pi_H^R \otimes H))) \circ ((t_{H,H} \circ (H \otimes \lambda_H)) \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H) \\
&= (\mu_H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (H \otimes t_{H,H} \otimes H) \circ ((t_{H,H} \circ (H \otimes \lambda_H)) \otimes \delta_H) \circ (H \otimes \delta_H) \\
&= (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (t_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes (\mu_H \otimes (\lambda_H \otimes H) \circ \delta_H) \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H) \\
&= (\Pi_H^R \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (t_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H) \\
&= \Pi_H^R \circ \mu_H,
\end{aligned}
$$

siendo la primera igualdad cierta por (1.36) y la asociatividad de μ_H, la segunda por (1.40), la tercera por (b3-2) de la Definición 1.2.9 y la coasociatividad de δ_H, la cuarta por (1.29) y (1.35), la quinta por (1.40) y (1.52).

En la novena igualdad se usa (1.33) y la antimultiplicatividad del antípodo, en la décima (1.45), en la undécima (1.31) y en la duodécima la antimultiplicatividad del antípodo y (c1) de (1) de Ejemplos 1.2.10 para H. La décimotercera igualdad se cumple ya que gracias a (1.33) y (1.51)

$$(H \otimes \Pi_H^R) \circ \delta_H \circ i_L = (H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H \circ i_L. \tag{5.86}$$

La décimocuarta es cierta porque usando la anti(co)multiplicatividad del antípodo, (c1) de (1) de Ejemplos 1.2.10 para H y la naturalidad de la trenza se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&(\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_D \circ \lambda_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes H) \\
&= c_{H,H} \circ ((\lambda_H \circ \mu_H) \otimes (\mu_H \circ c_{H,H} \circ (\Pi_H^R \otimes \lambda_H))) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H).
\end{aligned}
$$

La décimoquinta igualdad es consecuencia de (1.51), las propiedades de la escisión para Π_H^L y la naturalidad de la trenza, la décimosexta del carácter de morfismos de (co)módulos de e_D y u_D. En la décimoséptima se aplica la naturalidad de la trenza y que por ser D un álgebra de Hopf, $\Pi_D^R = u_D \circ e_D$. Finalmente, la décimoctava igualdad se cumple ya que:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{D\times H} \circ (\lambda_{D\times H} \otimes D \times H) \circ \delta_{D\times H} \\
&= p_{D\otimes H} \circ ((\mu_D \circ (D \otimes \varphi_D)) \otimes \mu_H) \circ (D \otimes ((H \otimes c_{H,D}) \circ (\delta_H \otimes D)) \otimes H)
\end{aligned}
$$

$$\circ(\nabla_{D\otimes H}\otimes D\otimes H)\circ(((\varphi_D\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,D})\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes\lambda_D)$$
$$\circ(H\otimes c_{D,H})\circ(\varrho_D\otimes H))\otimes D\otimes H)\circ(\nabla_{D\otimes H}\otimes\nabla_{D\otimes H})$$
$$\circ(D\otimes((\mu_H\otimes H)\circ(H\otimes c_{D,H})\circ(\varrho_D\otimes H))\otimes H)\circ(\delta_D\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}$$
$$= p_{D\otimes H}\circ((\mu_D\circ(\varphi_D\otimes\varphi_D)\circ(H\otimes c_{H,D}\otimes D))\otimes\mu_H)\circ(\delta_H\otimes D\otimes c_{H,D}\otimes H)$$
$$\circ(H\otimes c_{H,D}\otimes D\otimes H)\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes D\otimes D\otimes H)$$
$$\circ(\mu_H\otimes(c_{D,H}\circ(\lambda_D\otimes H))\otimes D\otimes H)\circ(H\otimes c_{D,H}\otimes c_{D,H}\otimes H)$$
$$\circ(\varrho_D\otimes\varrho_D\otimes H\otimes H)\circ(\delta_D\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}$$
$$= p_{D\otimes H}\circ(\varphi_D\otimes\mu_H)\circ(H\otimes c_{H,D}\otimes H)\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes D\otimes H))$$
$$\circ(H\otimes(c_{D,H}\circ(\Pi_D^R\otimes H))\otimes H)\circ(\varrho_D\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H},$$

donde la primera igualdad se deduce de las definiciones de $\mu_{D\times H}$, $\delta_{D\times H}$ y $\lambda_{D\times H}$, la segunda de (5.35), la asociatividad de μ_B y μ_D, la coasociatividad de δ_B y δ_D, (5.72), (5.74), junto con (b1-1) y (b2-1) de la Definición 1.2.9 para D. La tercera igualdad es consecuencia de la naturalidad de la trenza, (5.61), (5.67) y (1.29).

Finalmente, la prueba para (c4-3) de (1) de Ejemplos 1.2.10 está dada por:

$$\mu_{B\times H}\circ(\lambda_{D\times H}\otimes(\mu_{D\times H}\circ(D\times H\otimes\lambda_{D\times H})\circ\delta_{D\times H}))\circ\delta_{D\times H}$$
$$= p_{D\otimes H}\circ((\mu_D\circ(D\otimes\varphi_D))\otimes\mu_H)\circ(D\otimes((H\otimes c_{H,D})\circ(\delta_H\otimes D))\otimes H)$$
$$\circ((\nabla_{D\otimes H}\circ(\varphi_D\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,D}))\otimes D\otimes H)$$
$$\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes\lambda_D\otimes\nabla_{D\otimes H})\circ(H\otimes c_{D,H}\otimes(\mu_D\circ(D\otimes\lambda_D))\otimes\eta_H)$$
$$\circ(\varrho_D\otimes H\otimes\delta_D\otimes\varepsilon_H)\circ(\nabla_{D\otimes H}\otimes\nabla_{D\otimes H})\circ(D\otimes((\mu_H\otimes D)$$
$$\circ(H\otimes c_{D,H})\circ(\varrho_D\otimes H))\otimes H)\circ(\delta_D\otimes\delta_H)\circ i_{D\otimes H}$$
$$= p_{D\otimes H}\circ((\mu_D\circ(D\otimes\varphi_D))\otimes H)\circ(D\otimes H\otimes c_{H,D})\circ(\varphi_D\otimes\delta_H\otimes D)$$
$$\circ(H\otimes c_{H,D}\otimes D)\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes\lambda_D\otimes D)\circ(H\otimes c_{D,H}\otimes\Pi_D^L)$$
$$\circ(\varrho_D\otimes((\mu_H\otimes D)\circ(H\otimes c_{D,H})\circ(\varrho_D\otimes H)))\circ(\delta_D\otimes H)\circ i_{D\otimes H}$$

$$= p_{D\otimes H}\circ(\varphi_D\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,D})\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes D)\circ(H\otimes c_{D,H})$$
$$\circ(H\otimes(\mu_D\circ(\lambda_D\otimes D))\otimes H)\circ(H\otimes D\otimes\Pi_D^L\otimes H)$$
$$\circ(H\otimes\delta_D\otimes H)\circ(\varrho_D\otimes H)\circ i_{D\otimes H}$$
$$= p_{D\otimes H}\circ(\varphi_D\otimes H)\circ(H\otimes c_{H,D})\circ((\delta_H\circ\lambda_H\circ\mu_H)\otimes\lambda_D)\circ(H\otimes c_{D,H})$$
$$\circ(\varrho_D\otimes H)\circ i_{D\otimes H}$$
$$= \lambda_{D\times H},$$

donde la primera igualdad se sigue de (5.81) y las definiciones de $\mu_{D\times H}$, $\delta_{D\times H}$ y $\lambda_{D\times H}$, la segunda es cierta por (5.34), (5.35), la asociatividad de μ_B y μ_D, la coasociatividad de δ_B y δ_D, (5.72), (5.74), (b1-1) y (b2-1) de la Definición 1.2.9 para D, junto con las propiedades de η_H y ε_H. La tercera igualdad es consecuencia de la naturalidad de la trenza, la la asociatividad de μ_B y μ_D, la coasociatividad de δ_B y δ_D), (5.61) y (5.67). La cuarta se obtiene gracias a (b7-3) de la Definición 1.2.9 para D y la última es cierta por la definición de $\lambda_{D\times H}$. □

Con la notación del párrafo 5.1.6, dado (B,f,g) un objeto en $\mathcal{P}roj(H)$, la Proposición 5.1.14 implica en particular que $(B_H,\varphi_{B_H},\varrho_{B_H})$ es un objeto en ${}^H_H\mathcal{YD}$, y la cuádrupla $(c_{B_H,H}, c^{-1}_{B_H,H}, c_{H,B_H}, c^{-1}_{H,B_H})$ es su operador débil asociado porque $g\circ f = id_H$. Además, cuando el antípodo de H es inversible, en virtud del Teorema 5.3.2, $(B_H,\eta_{B_H},\mu_{B_H},\varepsilon_{B_H},\delta_{B_H},\lambda_{B_H})$ es un AHTD en $\mathcal{C}$.

El objeto B_H puede ser dotado también de una estructura de (co)álgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$. El proceso para realizar la construcción es el siguiente:

Proposición 5.4.17. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ y (B,f,g) un objeto en $\mathcal{P}roj(H)$. Entonces:*

(i) El par (B_H,φ_{B_H}) es un H-módulo álgebra y un H-comódulo álgebra por la izquierda en $\mathcal{C}$.

(i) El par (B_H,ϱ_{B_H}) es un H-módulo coálgebra y un H-comódulo coálgebra por la izquierda en $\mathcal{C}$.

Prueba:
La demostración de este resultado es similar a la de la Proposición 2.4 de [2] realizada en el contexto simétrico. La única diferencia se encuentra en que para demostrar la condición (5.61), en los cálculos realizados en [2] la octava de las igualdades hace uso sólo de la naturalidad de la trenza, mientras que en este caso para obtener la igualdad correspondiente es necesario aplicar además la fórmula (1.26) para $t_{H,H} = c_{H,H}$. Análogamente, intercambiando entre sí las propiedades de álgebras y coálgebras, para demostrar (5.65), además de la naturalidad de la trenza debe aplicarse (1.28). □

El hecho de que se cumpla la proposición anterior hace que en el presente marco monoidal sigan siendo válidas las pruebas de la Proposición 2.6 y los Teoremas 2.8 y 2.10 de [3] realizadas en el caso simétrico, pues éstas no dependen de la propiedad de simetría. Entonces:

Proposición 5.4.18. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y (B, f, g) un objeto en $\mathcal{P}roj(H)$. Se cumple:*

i) La terna $(B_H, u_{B_H} := p_H^B \circ f \circ i_L, m_{B_H} = \mu_{B_H} \circ i_{B_H \otimes B_H})$ es un álgebra en ${}_H^H\mathcal{YD}$.

ii) La terna $(B_H, e_{B_H} := p_L \circ g \circ i_H^B, \Delta_{B_H} := p_{B_H \otimes B_H} \circ \delta_{B_H})$ es una coálgebra ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Teorema 5.4.19. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y (B, f, g) un objeto en $\mathcal{P}roj(H)$. Entonces, si u_{B_H}, m_{B_H}, e_{B_H}, Δ_{B_H}, son los morfismos definidos en la Proposición 5.4.18, tomando*

$$\lambda_{B_H} := p_H^B \circ ((f \circ g) \wedge \lambda_B) \circ i_H^B,$$

se cumple que $(B_H, u_{B_H}, m_{B_H}, e_{B_H}, \Delta_{B_H}, \lambda_{B_H})$ es un álgebra de Hopf en la categoría ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Teorema 5.4.20. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y (B, f, g) un objeto en $\mathcal{P}roj(H)$. Entonces B es isomorfo como AHD al biproducto smash débil $B_H \times H$ introducido en el párrafo 5.4.15.*

Como consecuencia directa del teorema anterior, en esas condiciones los triples (B, f, g) y $(B_H \times H, p_{B_H \otimes H} \circ (\eta_{B_H} \otimes H), (\varepsilon_{B_H} \otimes H) \circ i_{B_H \otimes H})$ son isomorfos como objetos en $\mathcal{P}roj(H)$.

Argumentos similares a los empleados en la Proposición 3.3 de [4] permiten demostrar lo siguiente

Proposición 5.4.21. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible y $D = (D, u_D, m_D, e_D, \Delta_D, \lambda_D)$un álgebra de Hopf en ${}_H^H\mathcal{YD}$. Considérese el AHTD $D = (D, \eta_D, \mu_D, \varepsilon_D, \delta_D, \lambda_D)$ en $\mathcal{C}$ obtenida en el Teorema 5.4.14 y $D \times H$ el AHD en $\mathcal{C}$ definida en el párrafo 5.4.15. Se cumple:*

(i) El triple $(D \times H, \tilde{f} := p_{D \otimes H} \circ (\eta_D \otimes H), \tilde{g} := (\varepsilon_D \otimes H) \circ i_{D \otimes H})$ es un objeto en $\mathcal{P}roj(H)$.

(ii) Existe un isomorfismo $\omega : D \to (D \times H)_H$ de AHTD en $\mathcal{C}$.

En la Proposición 5.4.21, el primer apartado muestra que partiendo de un álgebra de Hopf en ${}_H^H\mathcal{YD}$ es posible construir un objeto en $\mathcal{P}roj(H)$. El segundo apartado es además una herramienta técnica de gran utilidad pues tomando ω^{-1} para definir una de las transformaciones naturales necesarias se establece el resultado con el que acabamos la sección:

Teorema 5.4.22. *Sea H un AHD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Existe una equivalencia de categorías entre $\mathcal{P}roj(H)$ y $\mathcal{HA}({}_H^H\mathcal{YD})$.*

Prueba:
Se introducen en primer lugar los funtores que intervienen en la equivalencia. Dado (B, f, g) un objeto en $\mathcal{P}roj(H)$, en virtud del Teorema 5.4.19

$$(B_H, u_{B_H}, m_{B_H}, e_{B_H}, \Delta_{B_H}, \lambda_{B_H})$$

es un objeto en $\mathcal{HA}({}_H^H\mathcal{YD})$. Es entonces posible definir el funtor

$$F : \mathcal{P}roj(H) \to \mathcal{HA}({}_H^H\mathcal{YD})$$

como en el Corolario 5.1.16.

En el otro sentido, en virtud de la Proposición 5.4.21, se define el funtor

$$G : \mathcal{HA}({}_H^H\mathcal{YD}) \to \mathcal{P}roj(H)$$

actuando sobre un objeto D como

$$G(D) = (D \times H, \tilde{f} = p_{D\otimes H} \circ (\eta_D \times H), \tilde{g} = (\varepsilon_D \times H) \circ i_{D\otimes H})$$

y sobre un morfismo $r : D \to D'$ como

$$G(r) = r \times H.$$

Siguiendo la misma estrategia y usando las mismas técnicas que en el Teorema 3.4 de [4] se demuestra que F y G son en efecto dos funtores que establecen una equivalencia de categorías. $\square$

Bibliografía

[1] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge Tracts in Mathematics 74, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York 1980.

[2] J.N. Alonso Álvarez, R. González Rodríguez, *Crossed products for weak Hopf algebras with coalgebra splitting*, J. of Algebra **281** (2004), 731-752.

[3] J. N. Alonso Álvarez, J. M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, *Yetter-Drinfeld modules and projections of weak Hopf algebras*, J. of Algebra **315** (2007), 396-418.

[4] J. N. Alonso Álvarez, J. M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, *Weak Hopf algebras and weak Yang-Baxter operators*, J. of Algebra **320** (2008), 2101-2143.

[5] J. N. Alonso Álvarez, J. M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, *Weak Braided Hopf Algebras*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), 2423-2458.

[6] J. N. Alonso Álvarez, J. M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, *Weak braided bialgebras and weak entwining structures*, Bull. of the Australian Math. Soc. **80** (2009), 306-316.

[7] J.N. Alonso Álvarez, J. M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, A. B. Rodríguez Raposo, *Invertible weak entwining structures and weak C-cleft extensions*, Appl. Cat. Struct. **14** (2006), 411-419.

[8] J.N. Alonso Álvarez, J. M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, M. P. López López, E. Villanueva Novoa, *Weak Hopf algebras with pro-*

jection and weak smash bialgebra structures, J. of Algebra **269** (2003), 701-725.

[9] J. N. Alonso Álvarez, J. M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, C. Soneira Calvo, *Projections of Weak Braided Hopf Algebras*, Science China Math. **54** (2011), 877-906.

[10] J. N. Alonso Álvarez, J. M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, C. Soneira Calvo, *The monoidal category of Yetter-Drinfeld modules over a weak braided Hopf algebra*, Preprint.

[11] J. N. Alonso Álvarez, J. M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, C. Soneira Calvo, *Adjoint actions and quantum commutativity in a weak setting*, Preprint.

[12] J. N. Alonso Álvarez, J. M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, C. Soneira Calvo, *Yetter-Drinfeld categories*, Preprint.

[13] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider, *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*, Ann. of Math. **171** (2010), 375-417.

[14] R. J. Baxter, *Partition function for the eight-vertex lattice model*, Ann. Physics **70** (1972), 193-228.

[15] R. J. Baxter, *Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London 1982.

[16] J. Bénabou, *Catégories avec multiplication*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **256** (1963), 1887-1890.

[17] Y. Bespalov, *Crossed modules and quantum groups in braided categories*, Appl. Categ. Structures **5** (1997), 155-204.

[18] Y. Bespalov, B. Drabant, *Hopf (bi)modules and crossed modules in braided monoidal categories*, J. Pure Appl. Algebra **123** (1998), 105-129.

[19] Y. Bespalov, B. Drabant, *Cross product bialgebras I*, J. Algebra **219** (1999), 466-505.

[20] Y. Bespalov, B. Drabant, *Cross product bialgebras II*, J. Algebra **240** (2001), 445-504.

[21] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, *Weak Hopf algebras I. Integral theory and C^*-structure*, J. of Algebra **221** (1999), 385-438.

[22] G. Böhm, *Doi-Hopf modules over weak Hopf algebras*, Comm. Algebra **28** (2000), 4678-4698.

[23] G. Böhm, K. Szlachányi, *Hopf algebroids with bijective antipodes: Axioms, integrals and duals*, J. Algebra **274** (2004), 585-617.

[24] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, *Weak Hopf algebras, II. Representation theory, dimensions and the Markov trace*, J. of Algebra **233** (2000), 156-212.

[25] F. Borceaux, *Handbook of categorical algebra 1. Basic category theory*, Encyclopedia of mathematics and its applications **50**, Cambridge University Press, Cambridge 2008.

[26] F. Borceaux, *Handbook of categorical algebra 2. Categories and structures*, Encyclopedia of mathematics and its applications **51**, Cambridge University Press, Cambridge 2008.

[27] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes des groupes de Lie compacts*, Ann. Math. **57** (1953), 115-207.

[28] T. Brzeziński, G. Militaru, *Bialgebroids, $\times_A$-Bialgebras and Duality*, J. Algebra **251** (2002), 279-294.

[29] D. Bulacu, E. Nauwealaerts, *Radford's biproduct for quasi-Hopf algebras and bosonization*, J. Pure Appl. Algebra **174** (2002), 1-42.

[30] D. Bulacu, S. Caenepeel, F. Panaite, *Yetter-Drinfeld categories for quasi-Hopf algebras*, Comm. Algebra **34** (2006), 1-35.

[31] S. Caenepeel, E. De Groot, *Modules over weak entwining structures*, Comtemp. Math. **267** (2000), 31-54.

[32] S. Caenepeel, G. Militaru, S. Zhu, *Crossed modules and Doi-Hopf modules*, Israel J. Math. **100** (1997), 221-247.

[33] S. Caenepeel, G. Militaru, S. Zhu, *Frobenius and separable functors for generalized module categories and nonlinear equations*, Lecture notes in Mathematics **1787**, Springer Verlag, Berlin 2002.

[34] S. Caenepeel, D.Wang, Y. Yin, *Yetter-Drinfeld modules over weak Hopf algebras and the center construction*, Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat. **51** (2005), 69-98.

[35] P. Cartier, *Dualité de Tannaka des groupes et des algèbres de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris **242** (1956), 322-325.

[36] Y. Doi, *Equivalent crossed products for a Hopf algebra*, Comm. Algebra **17** (1989), 3053-3085.

[37] Y. Doi, *Unifying Hopf modules.* J. Algebra **153** (1992), 373-385.

[38] V. G. Drinfeld, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **283**, (1985), 1060-1064. English trans.: Soviet Maht. Dokl. **32** (1985), 254-258.

[39] V. G. Drinfeld, *Quantum groups* Proc. Int. Cong. Math., (Berkeley, Calif. 1986), 798-820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987).

[40] V. G. Drinfeld, *Almost cocommutative Hopf algebras*, Algebra i Analizi **1** (1989), 30-46. English trans.: Leningrad Math J. **1** (1990), 321-342.

[41] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Algebra i Analizi **6** (1989), 114-148. English trans.: Leningrad Math. J. **1** (1990), 1419-1457.

[42] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Problems of modern quantum field theory (Alushta 1989), Res. Rep. Phys., Springer, Berlin 1989, 1-13.

[43] S. Eilenberg, G. M. Kelly, *Closed categories*, Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif. 1965), Springer, New York (1966), 421-562.

[44] B. Enriquez, G. Felder, *Elliptic quantum groups* $E_{\tau,\eta}(sl_2)$ *and quasi-Hopf algebras*, Comm. Math. Phys. **195** (1998), 651-689.

[45] P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik, *On fusion categories*, Ann. of Math **162** (2005), 581-642.

[46] L. D. Faddeev, *Quantum completely integrable models in field theory*, Sov. Sci. Rev. Sec. C (1980), 107-155.

[47] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, *Quantum-mechanical aprroach to completely integrable models of field theorie*, Dolkl. Akad. Nauk SSSR **243** (1978), 1430-1433.

[48] L. D. Faddeev, L. A. Takhtadzhyan, *Quantum-method of the inverse problem and Heisenberg's XX-model*, Usp. Mat. Nauk. **34** (1979), 13-63.

[49] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, L. A. Takhtadzhyan, *Quantum-method of the inverse problem I*, Teoret. Mat. Fiz. **40** (1979), 194-220.

[50] G. Felder, *Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves*, Proc. Int. Cong. of Math., (Zürich 1994), 1247-1255, Birkhäuser, Basel 1995.

[51] G. Felder, *Elliptic quantum groups*, Proc. XIth Int. Cong. Math. Phys. (Paris 1994), International Press, Cambridge 1995, 211-218.

[52] P. J. Freyd, D. Yetter, *Braided compact closed categories with applications to low-dimensional topology*, Adv. Math. **77** (1989), 156-182.

[53] J. L. Gervais, A. Neveu, *Novel triangle relations and absence of tachyons in Liouville string field theory*, Nuc. Phys. B **238** (1984), 125-141.

[54] T. Hayasi, *Quantum group symmetry of partition functions of IRF models and its applications to Jones' index theory*, Comm. Math. Phys. **157** (1993), 331-345.

[55] H. Hopf, *Topologie der Gruppen-Manningfaltigkeiten und ihren Verallgemeinerungen* Ann. of Math **42** (1945), 22-52.

[56] M. Jimbo, *A q-analogue of $U(gl(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247-252.

[57] A. Joyal, R. Street, *Tortile Yang-Baxter operators in tensor categories*, J. Pure Appl. Algebra **71** (1991), 43-51.

[58] A. Joyal, R. Street, *Braided tensor categories*, Adv. in Math. **102** (1993), 20-78.

[59] Karoubi, *K-théorie*, Séminaire de Mathématiques Supérieures **36**, (Été 1969). Les Presses de L'Université de Montréal, Montreal 1971.

[60] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics **155**, Springer Verlag, New York 1995.

[61] M. Koppinen, *Variations in the smash product with applications to group-graded rings*, J. Pure Appl. Algebra **104** (1995), 61-80.

[62] L. A. Lambe, D. E. Radford, *Algebraic Aspects of the Quantum Yang-Baxter Equation*, J. of Algebra **154** (1992), 228-288.

[63] S. Mac Lane, *Natural associativity and commutativity*, Rice Univ. Studies **49** (1963), 28-46.

[64] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics **5** (2nd. ed.), Springer, New York 1998.

[65] S. Majid, *Physics for algebrists: Non-commutative and noncocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction*, J. of Algebra **130** (1990), 17-64.

[66] S. Majid, *More examples of bicrossproduct and double crossproduct Hopf algebras*, Isr. J. Math **72** (1990), 133-148.

[67] S. Majid, *Doubles for quasitriangular Hopf algebras*, Comm. Algebra **11** (1991), 3061-3073.

[68] S. Majid, *Representations, duals and quantum doubles of monoidal categories*, Rend. Circ. Maht. Palermo Suppl. **26** (1991), 197-206.

[69] S. Majid, *Cross products by braided groups and bosonization*, J. of Algebra **163** (1994), 165-190.

[70] S. Majid, *Algebras and Hopf algebras in braided categories*, Lect. Notes Pure Appl. Maht **158**, Marcel Dekker, New York 1994, 55-105.

[71] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambrigde University Press, Cambridge 1995.

[72] Y. I. Manin, *Quantum groups and Noncommutative Geometry*, Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, Montréal 1988.

[73] J. Milnor, J. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. **81** (1965), 211-264.

[74] A. Nenciu, *The center construction for weak Hopf algebras*, Tsukuba J. Math. **26** (2002), 189-204.

[75] F. Nill, *Axioms for weak bialgebras*, math.QA/9805104.

[76] D. Nikshych, A. Vainerman, *Finite quantum gropoids and their applications*, Proc. New Directions in Hopf Algebras, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2002, 211-262.

[77] F. Panaite, M. D. Staic, *Generalized (anti) Yetter-Drinfeld modules as components of a braided T-category*, Israel J. Math. **158** (2007), 349-365.

[78] B. Pareigis, *A non-commutative non-cocommutative Hopf algebra in nature*, J. Algebra **70** (1981), 356-374.

[79] D. E. Radford, *The structure of Hopf algebras with projection*, J. of Algebra **92** (1985), 322-347.

[80] D. E. Radford, *Solutions to the quantum Yang-Baxter equation and the Drinfeld double*, J. of Algebra **161** (1993), 20-32.

[81] D. E. Radford, J. Towber, *Yetter-Drinfeld categories associated to an arbitrary bialgebra*, J. of Pure and Applied Algebra **87** (1993), 259-279.

[82] N. Y. Reshetikhin, V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), 547-597.

[83] B. Scharfchwerdt, *The Nichols Zoeller theorem for Hopf algebras in the category of Yetter-Drinfeld modules*, Comm. Algebra **29** (2001), 2481-2487.

[84] P. Schauenburg, *Examples of equivalences of Doi-Koppinen Hopf module categories, including Yetter-Drinfeld modules*, Bull. Belg. Math. Soc. **6** (1999), 91-98.

[85] P. Schauenburg, *Weak Hopf algebras and quantum groupoids*, Banach Center Publ. **61** (2003), 171-181.

[86] E. K. Skylanin, *Quantum version of the inverse scattering method*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **95** (1980), 55-128.

[87] M. Sweedler, *Hopf algebras*, W.A. Benjamin Inc., New York 1969.

[88] K. Szlachányi, *Weak Hopf algebras. Operator algebras and quantum field theory*, (Rome 1996), 621-632, Int. Press, Cambridge 1997.

[89] E. J. Taft, R. L. Wilson, *There exist finite-dimensional Hopf algebras with antipodes of arbitrary even order*, J. algebra **62** (1980), 283-291.

[90] M. Takeuchi, *Survey of braided Hopf algebras*, Contemp. Math. **267** (2000), 301-323.

[91] V. G. Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), 527-553.

[92] V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics **18**, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1994.

[93] P. Vecsernyés, *Larson-Sweedler theorem and the role of grouplike elements in weak Hopf algebras*, J. Algebra **270** (2003), 471-520.

[94] C.N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1312-1315.

[95] D. N. Yetter, *Quantum groups and representations of monoidal categories*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **108** (1990), 261-290.

Índice alfabético

Resumo en galego

Obxectivos

Esta memoria ten dous obxectivos principais.

O primeiro é desenvolver unha teoría de módulos Yetter-Drinfeld sobre unha álxebra de Hopf trenzada feble D nunha categoría monoidal estricta $\mathcal{C}$ onde todo idempotente racha. Esta teoría xeral establécese de xeito que se recuperan como casos particulares os resultados obtidos para álxebras de Hopf en [79] e álxebras de Hopf febles (ver [22], [74], [34]) en categorías simétricas, e dando tamén varios exemplos destas estruturas de módulo Yetter-Drinfeld que non son abranguidas polas teorías anteriores.

O outro obxectivo é estudar o concepto de proxección sobre unha álxebra de Hopf trenzada feble e obter a versión categórica do teorema de proxección de Radford para álxebras de Hopf febles en categorías trenzadas, extendendo os resultados dados en [79], [69] e [4] no contexto simétrico.

Parte dos resultados atópanse en [9], [10] e [12].

Máis polo miúdo, o contido da memoria organízase en cinco capítulos que se resumen de seguido.

Capítulo 1: Preliminares

Neste capítulo establécese o contexto xeral no que se traballa ao longo da memoria e fíxase a notación básica a empregar.

Na primeira sección repásase a teoría de categorías monoidais. A segunda adícase a conceptos relacionados coas álxebras de Hopf trenzadas febles, dando as súas definicións e propiedades básicas. Lémbranse as nocións de álxebra de

Hopf e álxebra de Hopf feble en distintos contextos segundo as propiedades da categoría sobre a que se defina a estrutura, e explícase por que constitúen casos particulares de álxebras de Hopf trenzadas febles. Dánse tamén exemplos non triviais de álxebras de Hopf trenzadas febles, isto é, obxectos con esta estrutura que non son álxebras de Hopf nin álxebras de Hopf febles (Exemplos 1.2.10). No referente ás propiedades das álxebras de Hopf trenzadas febles, os resultados incluídos son xa coñecidos, a excepción do Teorema 1.2.15, onde se proba que a álxebra oposta e a álxebra cooposta dunha álxebra de Hopf trenzada feble con antípodo inversible, son tamén álxebras de Hopf trenzadas febles.

Capítulo 2: Operadores febles

O obxectivo fundamental deste capítulo consiste en poñer as bases para introducirmos a noción de módulo Yetter-Drinfeld sobre unha álxebra de Hopf trenzada feble nunha categoría monoidal estricta onde todo morfismo idempotente racha.

Para facermos iso, na primeira sección do capítulo introducimos a noción de operador feble, estudamos as súas propiedades básicas e a súa interacción cos morfismos idempotentes. En concreto, se D é unha biálxebra trenzada feble e M un obxecto calquera, defínese un (M, D)-operador feble coma unha colección de catro morfismos (r_M, r'_M, s_M, s'_M) que satisfai unha serie de axiomas (Definición 2.1.1). Exemplos particulares de operadores febles obtéñense a partires dun operador Yang-Baxter feble cando $M = D$, e a partires dunha trenza global no caso de categorías trenzadas (Observación 2.1.11).

Na segunda sección estúdanse os operadores febles cando o obxecto M ten ademais unha estrutura de módulo ou de comódulo. Neste senso, a noción de (M, D)-operador feble compatible permite xerar para M, tanto sobre D coma sobre as súas álxebras oposta e cooposta, novas estruturas de módulo e de comódulo (Proposicións 2.2.8 - 2.2.15).

Capítulo 3: Monoidalidade da categoría de módulos Yetter-Drinfeld

Neste capítulo, para unha álxebra de Hopf trenzada feble D nunha categoría monoidal estricta onde todo idempotente racha, introducirase a noción de módulo Yetter-Drinfeld e demostrarase que estes obxectos dan lugar a categorías monoidais.

Na primeira sección dáse a definición de módulo Yetter-Drinfeld esquerda-esquerda sobre D mediante condicións que involucran un (M, D)-operador feble compatible (Definición 3.1.1) e defínense tamén os morfismos entre tales obxectos, establecéndose a categoría ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ (Definición 3.1.5). A continuación estúdase a invarianza das (co)estruturas de (co)módulo ao compor cos morfismos idempotentes asociados ao operador feble (Proposición 3.1.10), para o que se emprega unha caracterización alternativa de módulo Yetter-Drinfeld (Proposición 3.1.6).

Na segunda sección establécese a estrutura monoidal de ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$. Dados M e N dous obxectos en ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ tómase como produto tensor a imaxe dun idempotente $\nabla_{M\otimes N} : M\otimes N \to M\otimes N$. Cando o antípodo λ_D é inversible, o devandito produto tensor, denotado como $M \times N$, pódese dotar dunha (co)estrutura de (co)módulo (Proposición 3.2.10) e dun $(M \times N, D)$-operador feble compatible (Proposición 3.2.11). Con esas estruturas $M \times N$ é un obxecto en ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ (Proposición 3.2.12).

Posteriormente demostrarase que a categoría ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ admite obxecto base e por medio dos morfismos asociados á escición do morfismo idempotente $\nabla_{M\otimes N}$ constrúense os isomorfismos naturais de asociatividade (Lema 3.2.15) e unidade (Lemas 3.2.17, 3.2.18), e finalmente demóstrase que a categoría ${}_{D}^{D}\mathcal{YD}$ é monoidal non estricta (Teorema 3.2.19).

Na terceira sección danse exemplos de módulos Yetter-Drinfeld traballando coa acción adxunta e a coacción adxunta asociada a D. Agora ben, é de interese destacar que cando H é unha álxebra de Hopf nunha categoría trenzada estricta, o triple (H, φ_H, δ_H) con φ_H a acción adxunta é un módulo Yetter-Drinfeld, ao igual có triple (H, μ_D, ϱ_H) con ϱ_H a coacción adxunta, mais no contexto feble estes resultados non son certos en xeral. Máis concretamente, cando partimos dunha álxebra de Hopf trenzada feble D, os morfismos $\omega_D^a = \varphi_D \circ (\eta_D \otimes D)$ e $\omega_D^c = (\varepsilon_D \otimes D) \circ \varrho_D$ son idempotentes en $\mathcal{C}$ (Proposición 3.3.1), e sobre as súas imaxes $\Omega^a(D)$ e $\Omega^c(D)$ respectivamente, definimos, a partir dos morfismos de escisión, estruturas de módulo Yetter-Drinfeld esquerda-esquerda sobre D (Proposición 3.3.11).

Capítulo 4: Equivalencias entre distintas categorías de módulos Yetter-Drinfeld

Neste capítulo acádase outra parte do primeiro obxectivo da memoria, estudando no contexto monoidal as distintas categorías Yetter-Drinfeld que xorden de xeito natural en función dos lados polos que se consideren as (co)estruturas de (co)módulo ou as deformacións realizadas sobre a base D, de modo que se recuperan os resultados de [81] ao particularizar ao caso de álxebras de Hopf en categorías simétricas. Comézase definindo as distintas categorías $\mathcal{YD}_D^D$, ${}_D\mathcal{YD}^D$ e ${}^D\mathcal{YD}_D$ e estudando as súas propiedades principais, para concluír probando que todas elas, así coma as correspondentes tomando como base D^{op}, D^{coop}, $D^{\mathrm{op}^{\mathrm{coop}}}$ ou $D^{\mathrm{coop}^{\mathrm{op}}}$, son equivalentes a ${}_D^D\mathcal{YD}$ (Teorema 4.2.1). O método de demostración consiste en probar primeiro que para calesquera das categorías consideradas, as estruturas de (co)módulo permanecen invariantes ao compor cos morfismos idempotentes asociados ao operador feble, polo que se poden aplicar as Proposicións 2.2.8 - 2.2.10 que establecen en particular que todas as transformacións realizadas nas (co)estruturas de (co)módulo ao longo da proba dan lugar a novas (co)estruturas para as que existe un operador feble compatible e este pódese determinar explicitamente.

Capítulo 5: Proxeccións sobre unha AHTF

O obxectivo fundamental deste derradeiro capítulo é o estudo das proxeccións sobre unha álxebra de Hopf trenzada feble. Ademais explicarase a relación entre os conceptos de operador feble e enguedellamento feble e daranse exemplos de módulos Yetter-Drinfeld e de álxebras de Hopf trenzadas febles que non abranguen as definicións clásicas.

Na primeira sección defínese a categoría $\mathcal{P}roj(D)$ das proxeccións sobre unha álxebra de Hopf trenzada feble D coma aquela cuxa clase de obxectos é a formada polos triples (B, f, g) formados por unha álxebra de Hopf trenzada feble B e máis dous morfismos de álxebras de Hopf trenzadas febles $f : D \to B$ e $g : B \to D$ que cumpren certas relacións de compatibilidade con respecto ao operador Yang-Baxter feble asociado a B e ademais $g \circ f = id_D$. Cada obxecto en $\mathcal{P}roj(D)$ define un morfismo idempotente $q_D^B : B \to B$ (Proposición 5.1.5) cuxa imaxe B_D pode dotarse dunha (co)estrutura de D-(co)módulo pola esquerda de xeito que o triple $(B_D, \varphi_{B_D}, \varrho_{B_D})$ é un obxecto en ${}_D^D\mathcal{YD}$ (5.1.14).

A segunda sección comeza lembrando os conceptos de estrutura enguedellada feble e a estrutura enguedellada feble inversible (Definicións 5.2.1 e 5.2.3) e logo aplícanse os resultados acadados na primeira sección para describir a relación entre os conceptos de operador Yang-Baxter feble e a estrutura enguedellada feble inversible en termos de operadores febles (Proposición 5.2.4).

Na terceira sección demóstrase que cando a álxebra de Hopf trenzada feble D ten antípodo inversible e (B, f, g) é un obxecto de $\mathcal{P}roj(D)$, daquela B_D é unha biálxebra para a que podemos construír un antípodo λ_{B_D} (Proposición 5.1.7) de tal xeito que B_D é unha álxebra de Hopf trenzada feble (Teorema 5.3.2).

Na cuarta sección aplícanse os resultados anteriores para dar unha versión categórica do teorema de proxección de Radford cando H é unha álxebra de Hopf feble nunha categoría monoidal trenzada estricta. En primeiro lugar, particularizando as construcións do Capítulo 3, demóstrase que, ao igual ca no caso simétrico, a categoría ${}_H^H\mathcal{YD}$ é trenzada. O resto da sección adícase a construír unha equivalencia categórica entre $\mathcal{P}roj(H)$ e a categoría das álxebras de Hopf en ${}_H^H\mathcal{YD}$ (Teorema 5.4.22).